

Ex 48 $\forall x > 0, f_m(x) = x - m \ln x$

1. Solutions de (E_m): $f_m(x) = 0$

f_m est dérivable par opérations sur $\mathbb{R}_+^*$ et: $\forall x > 0, f'_m(x) = 1 - \frac{m}{x} = \frac{x-m}{x}$

d'où le tableau de variations (si $m \geq 1$):

x	0	m	$+\infty$
$f'_m(x)$		- 0 +	
f_m		$+\infty$	$m - m \ln m$

avec: $\lim_{0^+} f_m = +\infty$ par opérations

$\lim_{+\infty} f_m = +\infty$ par croissances comparées.

f_m admet donc un minimum $M_m = m - m \ln m = m(1 - \ln m)$.

Si $m = 1$ ou 2 , alors $M_m > 0$ et: $\forall x > 0, f_m(x) > 0$: (E_m) n'a pas de solution.

Si $m \geq 3$, $M_m < 0$.

* Sur $]0, m]$ f_m est strictement décroissante et continue.

Elle réalise une bijection de $]0, m]$ sur $[M_m, +\infty[$.

$0 \in [M_m, +\infty[$ donc d'après le théorème de la bijection,

l'équation (E_m) admet une unique solution $u_m \in]0, m]$.

De plus, $f_m(1) = 1 > 0$ donc $u_m > 1$.

* Sur $]m, +\infty[$ f_m est strictement croissante et continue.

Elle réalise une bijection de $]m, +\infty[$ vers $]M_m, +\infty[$.

De même, l'équation (E_m) admet une unique solution $v_m \in]m, +\infty[$.

Conclusion: $\forall m \geq 3$, (E_m) admet exactement deux solutions u_m et v_m telles que: $1 < u_m < m < v_m$

$v_m > m$ donc par comparaison: $\lim_{m \rightarrow +\infty} v_m = +\infty$

2. Monotonie de (u_n)

Soit $m \geq 3$. $f_{m+1}(u_m) = u_m - (m+1) \ln(u_m)$

$$= u_m - m \ln u_m - \ln u_m$$

$$= f_m(u_m) - \ln u_m \quad \text{et } f_m(u_m) = 0$$

$$= -\ln u_m \quad \text{et } u_m > 1 \text{ donc } \ln u_m > 0$$

$$< 0$$

On a donc: $\forall m \geq 3, f_{m+1}(u_m) < f_m(u_{m+1})$ et f_{m+1} strictement décroissante

sur $]0, m+1]$, donc $u_m > u_{m+1}$.

Conclusion La suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est strictement décroissante.

3. (u_n) converge car décroissante et minorée par 1.

4. (U_n) converge vers 1.

$$\forall m \geq 3, f_m(U_n) = 0 \text{ donc } m \ln U_n = U_n \\ \ln U_n = \frac{U_n}{m}$$

et (U_n) converge vers $l \geq 1$ donc $U_n = l + o(1)$

$$\text{On a donc: } \forall m \geq 3, \ln U_n = \frac{l + o(1)}{m} = \frac{l}{m} + o\left(\frac{1}{m}\right) \text{ donc } \ln U_n \rightarrow 0$$

Par composée de limites: $U_n \rightarrow e^0 = 1$ donc $\boxed{\lim U_n = 1}$

5. Vitesse de convergence

$\forall m \geq 3$, on pose $\alpha_m = U_m - 1$, donc $U_m = 1 + \alpha_m$. $U_m \rightarrow 1$ donc $\alpha_m \rightarrow 0$

$$m \ln U_m = U_m \Leftrightarrow m \ln(1 + \alpha_m) = 1 + \alpha_m \sim 1$$

et $\alpha_m \rightarrow 0$ donc $\ln(1 + \alpha_m) \sim \alpha_m$

Par quotient d'équivalents: $m \alpha_m \sim 1$ donc $\alpha_m \sim \frac{1}{m}$

Conclusion $\boxed{U_m = 1 + \frac{1}{m} + o\left(\frac{1}{m}\right)}$

Ex 49 Série harmonique alternée cf: cours sur les séries.

Ex 50 Moyennes arithmétiques et géométriques itérées

$$0 < U_0 \leq V_0 \text{ et } \forall m \in \mathbb{N}, U_{m+1} = \sqrt{U_m V_m} \text{ et } V_{m+1} = \frac{U_m + V_m}{2}.$$

* $\forall m \in \mathbb{N}, 0 < U_m \leq V_m$

Preuve par récurrence. Pour $m \in \mathbb{N}$, on note P_m : " $0 < U_m \leq V_m$ ".

• P_0 est vraie d'après l'énoncé.

• Soit $m \geq 0$. Supposons P_m .

Alors $U_{m+1} = \sqrt{U_m V_m} > 0$ car $U_m > 0$ et $V_m > 0$

$V_{m+1} = \frac{U_m + V_m}{2} > 0$ pour la même raison

$$V_{m+1} - U_{m+1} = \frac{1}{2} (U_m + V_m - 2\sqrt{U_m V_m}) = \frac{1}{2} (\sqrt{V_m} - \sqrt{U_m})^2 \geq 0$$

donc $U_{m+1} \leq V_{m+1}$. P_{m+1} est vraie.

• On conclut en invoquant le principe de récurrence.

* (U_n) croît et (V_n) décroît

$$U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} \geq \sqrt{U_n U_n} \text{ car } V_n \geq U_n$$

donc $U_{n+1} \geq U_n$: (U_n) est croissante.

$$V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \leq \frac{V_n + V_n}{2} \text{ car } U_n \leq V_n$$

donc $V_{n+1} \leq V_n$: (V_n) est décroissante.

* $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ convergent

$(V_n)_n$ est décroissante et minorée par 0 (ou par U_0): (V_n) converge vers λ .

$(U_n)_n$ est croissante et majorée par V_0 : (U_n) converge vers μ .

* (U_n) et (V_n) ont même limite $V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$ donc par passage à la limite

$$\lambda = \frac{\lambda + \mu}{2} \text{ donc } \boxed{\lambda = \mu}$$

ex 53 | Modèle de Johnson-Schumacher (JS)

$$r, K > 0 \quad (JS) : y' = ry \left(\ln \frac{y}{K} \right)^2$$

1) Solution constante

Soit y une fonction constante vérifiant (JS).

Alors $y \neq 0$ car $\ln \frac{y}{K}$ est définie, et $y' = 0$ donc $\left(\ln \frac{y}{K} \right)^2 = 0$

La seule solution constante de (JS) est : $\forall t, y(t) = K$.

2. Résolution générale

a) $\forall t \in I, 0 < y(t) < K$

y est continue sur I (car dérivable), $y(0) \in]0, K[$
et y ne prend jamais ni la valeur 0 ni la valeur K .

D'après le TVI : $\forall t \in I, y(t) \in]0, K[$.

b) Changement de fonction

On pose $z = \frac{1}{\ln(\frac{y}{K})}$ qui est bien définie, et dérivable par opérations sur I .

On a donc : $\ln(\frac{y}{K}) = \frac{1}{z}$ donc $y = K \cdot e^{\frac{1}{z}}$

On dérive : $y' = -\frac{Kz'}{z^2} e^{\frac{1}{z}}$ et on injecte dans (JS).

$$-\frac{Kz'}{z^2} e^{\frac{1}{z}} = r K e^{\frac{1}{z}} \left(\frac{1}{z} \right)^2 \quad \text{donc en simplifiant : } z' = -r$$

On obtient : $z(t) = -rt + c$ pour une constante c ,

$$\text{donc : } y(t) = K \exp\left(\frac{1}{-rt+c}\right).$$

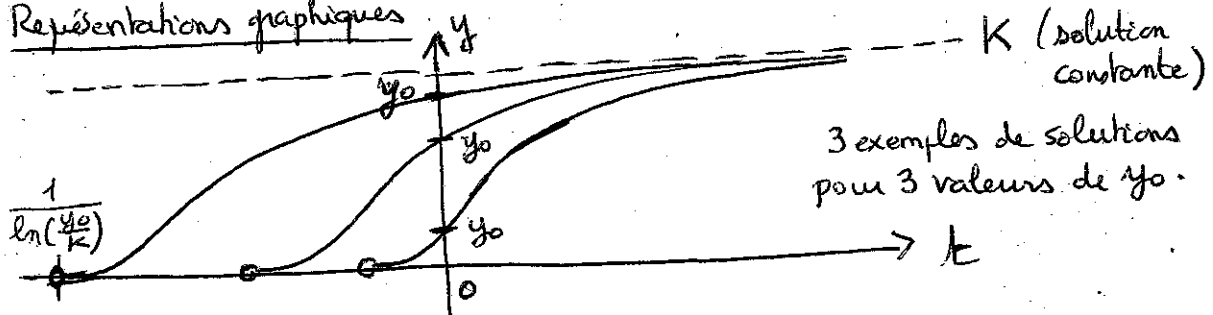
$y(t) < K$ impose $-rt+c < 0$ donc $t > \frac{c}{r}$, donc $I =]\frac{c}{r}, +\infty[$.

I contient 0 donc $c < 0$.

Conclusion $\exists c < 0, \forall t \in]\frac{c}{r}, +\infty[, y(t) = K \exp\left(\frac{1}{-rt+c}\right)$

3. Condition initiale $y(0) = y_0$ donne : $c = \frac{1}{\ln(\frac{y_0}{K})}$

4. Représentations graphiques



TD Polynômes

Ex 56 Polynômes de Tchebychev.

Questions 1 et 2 voir DM 4.

Question 3 On a vu que: $\forall z \in \mathbb{C}^*, \forall m \in \mathbb{N}, P_m(z + \frac{1}{z}) = z^m + \frac{1}{z^m}$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $z = e^{i\theta}$.

On a: $P_m(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = e^{mi\theta} + e^{-mi\theta}$ d'après Moivre

donc d'après Euler: $P_m(2\cos\theta) = 2\cos(m\theta)$.

Pour trouver les racines de P_m , on choisit θ tel que: $2\cos(m\theta) = 0$

donc $m\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $\theta = \frac{\pi}{2m} + \frac{k\pi}{m}$.

On pose alors: $\forall k \in [0, m-1], \alpha_k = 2\cos(\frac{\pi}{2m} + \frac{k\pi}{m})$.

Les α_k sont distincts deux-à-deux et:

$\forall k \in [0, m-1], P_m(\alpha_k) = 0$.

Puisque $\deg(P_m) = m$, on a trouvé les m racines de P_m .

On en déduit que P_m est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et que:

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, P_m = \prod_{k=0}^{m-1} (X - \alpha_k) \quad (\text{on sait que le coefficient dominant de } P_m \text{ vaut } 1).$$

Ex 58 Polynômes simples ou scindés dans $\mathbb{R}[X]$.

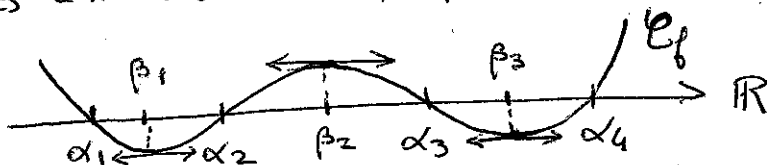
1. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est à racines simples, alors P' aussi.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et s'annule en $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$.

Sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$: f continue, dérivable sur $] \alpha_i, \alpha_{i+1}[$ et $f(\alpha_i) = f(\alpha_{i+1}) = 0$

donc d'après le théorème de Rolle, $\exists \beta_i \in] \alpha_i, \alpha_{i+1}[\mid f'(\beta_i) = 0$.

Schéma:



donc P' s'annule en $\beta_1, \dots, \beta_{p-1}$ telles que: $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \beta_{p-1} < \alpha_p$

$\deg(P') = \deg(P) - 1 = p - 1$ donc on a trouvé toutes les racines de P' .

Elles sont réelles, et distinctes deux-à-deux.

2. Si P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, alors P' aussi.

(a) D'après le cours, si α_k est racine de P de multiplicité m_k , alors:

$$P(\alpha_k) = P'(\alpha_k) = \dots = P^{(m_k-1)}(\alpha_k) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m_k)}(\alpha_k) \neq 0$$

donc α_k est racine de P' de multiplicité $m_k - 1$: $(X - \alpha_k)^{m_k-1}$ divise P' .

(b) On s'en sert pour simplifier le quotient P'/P :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^p \frac{m_k}{X - \alpha_k} \quad \text{définit une fonction continue par opérations sur } \mathbb{R} \setminus \{\alpha_i, 1 \leq i \leq p\}.$$

On vérifie que: $\forall i \in [1, p-1], \lim_{x \rightarrow \alpha_i^+} \frac{P'}{P}(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha_{i+1}^-} \frac{P'}{P}(x) = -\infty$

donc d'après le TVI, P'/P s'annule en $\beta_i \in] \alpha_i, \alpha_{i+1}[$. Les β_i sont donc racines de P' . On conclut en examinant les degrés: toutes les racines de P' sont réelles.