I Généralités

1 Définition

DÉFINITION

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. Pour tout $n \geqslant 0$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
Alors la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ s'appelle la **série de terme général** u_n.
On la note : $(S_n)_{n\geqslant 0} = \sum u_n$ ou $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.
S_n s'appelle la **somme partielle d'ordre** n (ou de rang n) de la série $\sum u_n$.
∗ Si la suite $(S_n)_n$ est convergente vers un réel ℓ, on dit que la série $\sum u_n$ **converge** vers ℓ et on note : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ell$. Ce réel ℓ est appelé la **somme de la série** $\sum u_n$.
∗ Sinon, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge**.

Vocabulaire : Étudier la *nature* d'une série, c'est dire si elle converge ou si elle diverge.

Remarque : On peut étudier une série *à partir d'un cerain rang* :

$\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ définies pour $n \geqslant n_0$.

PROPOSITION

On ne change pas la nature d'une série si on en modifie un nombre fini de termes.
Cependant, en cas de convergence, les sommes peuvent être différentes.

Exemple : pour tout $n_0 \geqslant 0$, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ sont toujours de même nature.

Exercice 1 : étudier la nature des séries (a) $\sum_{n\geqslant 0} n$ (b) $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

2 Exemples fondamentaux

a Séries géométriques

DÉFINITION

Soit $q \in \mathbf{R}$, et soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q.
Alors la série $\sum u_n$ est une **série géométrique**.

PROPRIÉTÉ

Une série géométrique de raison q converge si et seulement si : $-1 < q < 1$ (ou encore : $|q| < 1$).
Dans ce cas, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{u_0}{1-q}$.

preuve :

Remarque : si $|q| < 1$, alors $\forall n_0 \geqslant 0$, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \frac{u_{n_0}}{1-q}$. En particulier : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}$.

PROPRIÉTÉ

Soit $q \in \mathbf{R}$ tel que $|q| < 1$. Alors les séries $\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ sont appelées **séries géométriques dérivées première et seconde**.
Elles sont convergentes, et on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

preuve :

b Séries télescopiques

DÉFINITION

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite rélle. On pose : $\forall n \geqslant 0$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.
Alors la série $\sum v_n = \sum (u_{n+1} - u_n)$ est une **série télescopique**.

Proposition

La série télescopique $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_n$ converge.

Dans ce cas, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\lim u_n-u_0$.

preuve :

Exercice 2 : Étudier la nature de la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$. Déterminer sa somme en cas de convergence.

c Séries exponentielles

Définition

Soit $x\in\mathbf{R}$. Alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}$ est appelée **série exponentielle**.

Proposition

Pour tout $x\in\mathbf{R}$, la série exponentielle $\displaystyle\sum\frac{x^n}{n!}$ converge, et on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$.

preuve :

d Série harmonique

Définition

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est appelée la **série harmonique**.

Proposition

La série harmonique est divergente.

preuve :

3 Propriétés

Proposition

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes, et soient $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$.

Alors la série $\sum(\lambda u_n+\mu v_n)$ converge, et on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n+\mu v_n)=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\mu\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$

preuve :

Autrement dit, l'ensemble des séries convergentes forme un **R**-espace vectoriel.

Proposition ** Condition nécessaire de convergence **

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

preuve :

Attention ! La réciproque est fausse (contre-exemple : la série harmonique).

On en déduit par contraposée un critère de divergence :

Proposition ** Condition suffisante de divergence **

Si $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Remarque : on parle alors de divergence *grossière* de la série.

Exercice 3 : Soit $\alpha\leqslant 0$. Étudier la nature de la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$.

II Séries à termes positifs

1 Critère de convergence

Proposition

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à termes positifs.

Alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

preuve :

Remarque : on a un critère analogue pour les séries à termes négatifs.

Exercice 4 : Montrer que $\forall n\geqslant 2$, $\displaystyle\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{1}{n(n-1)}$ et en déduire la nature de la série $\displaystyle\sum\frac{1}{n^2}$.

à retenir : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge.

2 Théorèmes sur les séries à termes positifs

THÉORÈME ** THÉORÈME DE COMPARAISON POUR LES SÉRIES POSITIVES (TCPSP) **

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ (suites **positives**).
On a :

1. si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge, et : $0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
2. si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

preuve :

Remarque : la condition $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ peut ne se vérifier qu'à partir d'un certain rang.

Exercice 5 : Étudier la nature de $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ dans las cas où : (a) $\alpha \geqslant 2$ (b) $\alpha \leqslant 1$.

THÉORÈME ** THÉORÈME D'ÉQUIVALENCE POUR LES SÉRIES POSITIVES (TEPSP) **

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **positives** telles que : $u_n \sim v_n$.
Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

preuve :

Remarque : en cas de convergence, leurs sommes peuvent être différentes.

Exercice 6 : Étudier la nature des séries $\sum_{n \geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ et $\sum_{n \geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

III Absolue convergence

DÉFINITION

Soit $\sum u_n$ une série de réels. On dit que $\sum u_n$ est **absolument convergente** lorsque $\sum |u_n|$ est convergente. On dit aussi : $\sum u_n$ *converge absolument (CVA)*.

Remarque : "absolument" fait référence à la valeur absolue.
Si $(u_n)_n$ est une suite positive, les notions de convergence et d'absolue convergence se confondent.

Exemple et contre-exemple : $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente, mais $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ ne l'est pas.

PROPOSITION

Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente, et on a : $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

preuve :

Remarque : l'étude de l'absolue convergence d'une série est l'étude d'une série à termes positifs.
On peut donc utiliser les résultats du **II**.

Attention ! La réciproque est fausse.

Exercice 7 : étudier la nature de $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (*série harmonique alternée*).

PROPRIÉTÉ

$*$ Les séries géométriques et dérivées $\sum_{n \geqslant 0} q^n$, $\sum_{n \geqslant 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ sont absolument convergente si et seulement si $|q| < 1$.

$*$ Les séries exponentielles $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ sont absolument convergentes pour tout $x \in \mathbf{R}$.

preuves :

PROPOSITION ** LIBERTÉ DE SOMMATION **

Pour une série convergente, si on change l'ordre d'une infinité de termes, on obtient une nouvelle série qui peut être convergente mais posséder une somme différente, ou bien qui peut être divergente. Si la série est absolument convergente, ce problème disparaît. On parle de "liberté de sommation" : on peut sommer dans l'ordre qu'on veut.

Exemple et contre-exemple :

$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ converge absolument, donc on peut écrire : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2}$.

En revanche, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge sans converger absolument. On ne peut pas écrire :
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k}$ car on a fait apparaître deux séries divergentes.

IV Méthodes d'étude d'une série

1 Étudier la nature d'une série

Pour une série à termes positifs :

1. On peut étudier la suite des sommes partielles : $*$ si elle est majorée, la série converge,
   $*$ sinon, la série diverge.
2. On cherche à comparer à une série connue, et utiliser les théorèmes de comparaison ou d'équivalence.

Pour une série à termes quelconques :

1. On peut reconnaître une combinaison linéaire de séries convergentes.
2. Si $(u_n)_n$ ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge.
3. On étudie l'absolue convergence de la série, ce qui revient à étudier une série à termes positifs.
   Si $\sum |u_n|$ diverge, alors **on ne peut rien conclure**.
4. Comparaison série/intégrales (monotonie intégrale) : technique classique mais hors-programme.

Proposition

> Soit une série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ avec $u_n = f(n)$ où f est continue et décroissante sur $\mathbf{R}_+$.
> Alors : $\forall k \in \mathbf{N}^\star$, $\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$
> donc en sommant pour $k \in [\![1, n]\!]$ et d'après la relation de Chasles pour les intégrales :
> $$\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$
> Si on connaît une primitive de f, on peut encadrer les sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} u_k$ et conclure.

Remarque : même technique si f est croissante

Exercice 8 : séries de Riemann (hors-programme mais à savoir refaire)
Étudier selon la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbf{R}$ la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

2 Étudier la nature d'une série et calculer sa somme en cas de convergence

Si l'énoncé demande le calcul de la somme d'une série, on ne peut que se ramener à une série usuelle ou à une combinaison linéaire de séries usuelles : géométrique (ou dérivée première ou seconde), télescopique, exponentielle. Tout autre type de série ne pourra être calculée qu'en suivant les indications de l'énoncé.

Exercice 9 : montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :
(a) $\sum_{n\geqslant 0} 2^{n-3} \times 3^{1-n}$ (b) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^{n+2}}$ (c) $\sum_{n\geqslant 0} n^2 \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (d) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $(x \in \mathbf{R})$

Exercice 10 : pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$.
(a) Montrer que la série de terme général u_n converge.
(b) Calculer sa somme.