I Définitions et notations

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ désigne un univers probabilisé.

1 Variable aléatoire réelle discrète

DÉFINITION

Une **variable aléatoire réelle (VAR)** est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$.
L'ensemble de ses valeurs $X(\Omega) = \{X(\omega),\ \omega \in \Omega\}$ est appelé **univers-image**, ou **support** de X.

Exemple 1 :
On pioche une carte dans un jeu de 32 cartes. On gagne 4 points si on pioche un *As*, 1 point si on pioche une figure, et aucun point sinon. Alors le gain G est une VAR, d'univers-image $G(\Omega) = \{0, 1, 4\}$.

DÉFINITION

Une VAR est dite **discrète** si son univers-image est :

- ou bien *fini* de cardinal $n \in \mathbf{N}^\star$: $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
- ou bien *infini dénombrable* : $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in \mathbf{N}\}$.

Exemple 1 : la VAR de l'exemple 1 est discrète, son univers-image est fini de cardinal 3.
Exemple 2 : On jette une infinité de fois un dé bien équilibré. On note X le rang du lancer où pour la première fois on obtient un '6', et on pose $X = 0$ si on n'obtient jamais de '6'.
Alors X est une VAR discrète infinie dénombrable, avec $X(\Omega) = \mathbf{N}$.

2 Notation des événements liés à une VAR

Soit X une VAR. Soient $a < b$ des réels. On note les événements :

* $[X = a] = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = a\} = X^{-1}\big(\{a\}\big)$
* $[X > a] = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) > a\} = X^{-1}\big(]a, +\infty[\big)$
* $[X \geqslant a] = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \geqslant a\} = X^{-1}\big([a, +\infty[\big)$
* $[X < b] = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) < b\} = X^{-1}\big(]-\infty, b[\big)$
* $[X \leqslant b] = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant b\} = X^{-1}\big(]-\infty, b]\big)$
* $[a \leqslant X \leqslant b] = \{\omega \in \Omega,\ a \leqslant X(\omega) \leqslant b\} = X^{-1}\big([a, b]\big)$
* *etc*

Exemples : Avec la VAR de l'exemple 1 : $[G > 0]$ est l'événement "piocher un *As* ou une figure ".
Avec la VAR de l'exemple 2 : $[X = 2]$ est l'événement "obtenir autre chose que '6' au premier lancer et obtenir '6' au deuxième lancer".

3 Système complet d'événements lié à une VAR

PROPOSITION

Soit X une VAR discrète d'univers-image $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in I\}$, avec $I \subset \mathbf{N}$ fini ou infini.
Alors $\big([X = x_k]\big)_{k \in I}$ est un système complet d'événements.

4 Fonction d'une VAR

PROPOSITION

- Soit X une VAR définie sur Ω, soit $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbf{R}$.
  Alors $f \circ X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ est encore une VAR, notée : $f(X)$.
- Soient $X_1, \ldots, X_n$ des VAR définies sur Ω, soit $f : \displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega) \longrightarrow \mathbf{R}$.
  Alors $f\big(X_1, \ldots, X_n\big) : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ est encore une VAR.

Exemples :
Avec la VAR de l'exemple 1, on peut définir G^2 valant 16, 1 ou 0 selon qu'on pioche un *As*, une figure ou une autre carte.
Au cours de la même expérience, si on définit la VAR Y par $Y = 2$ si on pioche un *trèfle*, $Y = 1$ si on pioche un *pique* et $Y = 0$ sinon, alors $Z = G^2 - 2GY + 3Y$ est encore une VAR.
On pourra vérifier que $Z(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 6, 11, 16\}$.

II Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

1 Définition

Définition

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une VAR discrète. La **loi de probabilité de** X est l'application :

$$\mathbf{P}_X : \begin{cases} X(\Omega) \to [0,1] \\ x \mapsto \mathbf{P}(X = x) \end{cases}$$

Déterminer la loi de la VAR discrète X consiste donc à :

1. Déterminer l'univers-image $X(\Omega)$ de X ;
2. Pour tout $x \in X(\Omega)$, déterminer la probabilité : $\mathbf{P}(X = x)$.

Exemples :

• Avec la VAR de l'exemple 1, on a vu que $G(\Omega) = \{0, 1, 4\}$.

$\mathbf{P}(G = 4) = \mathbf{P}(\text{"piocher un As"}) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ par équiprobabilité des tirages, et de même :

$\mathbf{P}(G = 1) = \dfrac{12}{32} = \dfrac{3}{8}$ et $\mathbf{P}(G = 0) = \dfrac{16}{32} = \dfrac{1}{2}$.

On peut ici donner la loi de G sous forme d'un tableau :

x_k	0	1	4
$\mathbf{P}(G = x_k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

• Avec la VAR de l'exemple 2, on considère pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$ l'événement $[X = k]$, qu'on peut décrire par : "obtenir autre chose que '6' aux $(k-1)$ premiers lancers et obtenir '6' au k-ème lancer".

Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on note S_n l'événement "on obtient '6' au n-ème lancer.

On a donc : $[X = k] = \left(\displaystyle\bigcap_{n=1}^{k-1} \overline{S_n} \right) \cap S_k$ ce qui donne avec la formule des probabilités composées :

$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(\overline{S_1}) \times \mathbf{P}_{\overline{S_1}}(\overline{S_2}) \times \ldots \times \mathbf{P}_{\overline{S_1} \cap \ldots \cap \overline{S}_{k-1}}(S_k)$

Par indépendance des lancers successifs, et puisque le dé est bien équilibré :

$\mathbf{P}(X = k) = \dfrac{5}{6} \times \ldots \times \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{6}$ soit : $\boxed{\forall k \geqslant 1,\ \mathbf{P}(X = k) = \dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}.}$

2 Propriétés

Propriété

Soit X une VAR discrète d'univers-image $X(\Omega)$.

* si $X(\Omega)$ est fini, $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X = x_k) = 1$.
* si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, alors $X(\Omega) = \{x_k\}_{k \in \mathbf{N}}$.

  Dans ce cas, la série $\sum \mathbf{P}(X = x_k)$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_k) = 1$.

Exemples précédents :

* $\mathbf{P}(G = 0) + \mathbf{P}(G = 1) + \mathbf{P}(G = 4) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{8} = 1$.
* La série de terme général $\dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}$ pour $k \geqslant 1$ converge et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k} \quad \text{après un glissement d'indices}$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 1 \quad \text{en reconnaissant une série géometrique de raison } q = \frac{5}{6} \quad (|q| < 1)$$

Remarque : On a : $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - \mathbf{P}(X \geqslant 1) = 1 - 1 = 0$

donc l'événement "on n'obtient jamais '6' " est quasi-impossible.

Propriété

Soit X une VAR discrète, et soit A une partie de $\mathbf{R}$. Alors : $\mathbf{P}(X \in A) = \displaystyle\sum_{x \in A \cap X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x)$

Exemples : Avec la VAR de l'exemple 1 : $\mathbf{P}\big(G \in [-2,2]\big) = \mathbf{P}(G=0) + \mathbf{P}(G=1) = \dfrac{7}{8}$.

Avec celle de l'exemple 2 :

$$\mathbf{P}\big(0 \leqslant X \leqslant n\big) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \quad \text{car } \mathbf{P}(X=0)=0$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1-(\frac{5}{6})^n}{1-\frac{5}{6}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \text{(somme géométrique de raison } q \neq 1\text{)}$$

3 Existence d'une VAR

Théorème ** Théorème d'existence d'une VAR **

- Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels et $p_1, \ldots, p_n$ des réels positifs.
  Alors il existe une VAR X telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbf{P}(X = x_k) = p_k$
  si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.
- Soient $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ des réels et $(p_k)_{k\in\mathbf{N}}$ des réels positifs.
  Alors il existe une VAR X telle que $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in \mathbf{N}\}$ et $\forall k \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(X = x_k) = p_k$
  si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{k\in\mathbf{N}} p_k$ est convergente, et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.

Exemple : Soit $\lambda > 0$ un réel. On sait que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$.

On pose, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Alors $p_k \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} p_k$ converge et a pour somme 1.

Il existe donc une VAR X donc la loi est : $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et $\forall k \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(X = k) = p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

4 Fonction de répartition

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un univers Ω.
On appelle **fonction de répartition** de X l'application $F_X : \mathbf{R} \to [0,1]$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$$

Exemple : On a vu que pour la VAR de l'exemple 2 : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(0 \leqslant X \leqslant n) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

Mais puisque $[X < 0]$ est impossible, on a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(X \leqslant n) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

Enfin, X ne prend que des valeurs entières, donc pour tout réel x, $\mathbf{P}(X \leqslant x) = \mathbf{P}\big(X \leqslant \lfloor x \rfloor\big)$

La fonction de répartition de X a donc pour expression : $\begin{cases} F_X(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F_X(x) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^{\lfloor x \rfloor} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

(les deux formules correspondent lorsque $x \in [0,1[$)

Propriété

Toute fonction de répartition est croissante sur $\mathbf{R}$.
De plus, elle admet pour limite 0 en $-\infty$, et 1 en $+\infty$.

preuve :

Propriété

Soit F_X la fonction de répartition d'une VAR discrète X. Alors :

∗ F_X est continue à droite en tout réel x_0 : $\forall x_0 \in \mathbf{R},\ \displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} F_X(x) = F_X(x_0)$

∗ $\forall x_0 \in \mathbf{R},\ \displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} F_X(x) = F_X(x_0) - \mathbf{P}(X = x_0) = \mathbf{P}(X < x_0)$

Remarque : en particulier, F_X est continue en tout $x_0 \notin X(\Omega)$.

Définition

> Deux VAR discrètes X, Y définies sur le même univers Ω ont **la même loi** lorsque :
> * $X(\Omega) = Y(\Omega)$;
> * $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(Y = x)$.

Remarque : X et Y ne sont pas forcément égales. Par exemple si on jette une pièce bien équilibrée, qu'on définit $X = 1$ si on obtient '*pile*' et 0 sinon, et $Y = 1$ si on obtient '*face*' et 0 sinon, alors $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1\}$, $\mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(Y = 0) = \frac{1}{2} = \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(Y = 1)$
donc X et Y ont la même loi, mais on a clairement $X \neq Y$.

Théorème ** Obtention d'une loi grâce à la fonction de répartition **

> Deux VAR discrètes ayant la même fonction de répartition ont la même loi.
> En particulier, si F_X est la fonction de répartition d'une VAR discrète X ne prenant que des valeurs entières ($X(\Omega) \subset \mathbf{Z}$), alors on a : $\forall k \in \mathbf{Z},\ \mathbf{P}(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1)$.
> De plus, on a : $\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(X > k-1) - \mathbf{P}(X > k)$.

Exercice 1 : On lance n fois un dé bien équilibré ($n \in \mathbf{N}^\star$), et on note X la VAR égale au maximum obtenu au cours des n lancers.

1. Déterminer l'univers-image de X.
2. Pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$, montrer que : $\mathbf{P}(X \leqslant k) = \left(\dfrac{k}{6}\right)^n$.
3. En déduire la loi de X.

III Variables aléatoires discrètes usuelles

1 Loi certaine : lorsqu'il n'y a aucun hasard

Définition

> On dit qu'une variable aléatoire X définie sur un univers Ω suit la **loi certaine de valeur** a lorsque $X(\Omega)$ est un singleton : $\exists a \in \mathbf{R},\ X(\Omega) = \{a\}$

En conséquence, $\mathbf{P}(X = a) = 1$ et pour tout $b \neq a$, $\mathbf{P}(X = b) = 0$.

2 Loi uniforme : loi d'équiprobabilité

Définition

> Soit $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ un sous-ensemble fini de $\mathbf{R}$, de cardinal $n \in \mathbf{N}^\star$.
> On dit qu'une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi uniforme sur** A lorsque :
> * $X(\Omega) = A$
> * $\forall x \in A,\ \mathbf{P}(X = x) = \dfrac{1}{n}$.
>
> On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(A)$

Remarque : Il s'agit de la loi d'**équiprobabilité** sur A. Elle traduit l'expression **"au hasard"**.
Si $A = [\![1, n]\!]$, la loi de X est alors donnée par :

x_k	1	2	$\cdots$	n
$\mathbf{P}(X = x_k)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

Exemple : le résultat d'un lancer de dé supposé équilibré suit la loi $\mathcal{U}([\![1, 6]\!])$.

3 Loi de Bernoulli : expérience à deux issues

Définition

> Soit $p \in]0, 1[$. Une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p lorsque :
> * $X(\Omega) = \{0, 1\}$
> * $\begin{cases} \mathbf{P}(X = 1) = p \\ \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p \end{cases}$
>
> On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

Cette loi modélise le succès ($X = 1$) ou l'échec ($X = 0$) à une expérience aléatoire donnée.
p est la probabilité du succès. Exemple : $X = 1$ si on obtient "*pile*" en lançant une pièce, et $X = 0$ sinon.
p sera ici la probabilité de faire "*pile*" ($p = 1/2$ si la pièce n'est pas truquée).

4 Loi binomiale : loi des tirages avec remise

Définition

Soient $n \in \mathbf{N}^\star$ et $p \in]0,1[$.
Une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi binomiale de paramètres** n **et** p lorsque :

• $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ • $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

X compte le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli, indépendantes, et de même paramètre p : si $X_1, \ldots, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors :

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$$

5 Loi géométrique : loi du premier succès

Définition

Soit $p \in]0,1[$. Une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi géométrique de paramètre** p lorsque :
• $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$ • $\forall k \in \mathbf{N}^\star,\ \mathbf{P}(X=k) = p \times (1-p)^{k-1}$
On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

X est le rang d'apparition du premier succès lors d'une succession infinie d'épreuves de Bernoulli, indépendantes, et de même paramètre p.

La VAR X de l'exemple 2 suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$: $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.

L'événement $[X=0]$ étant quasi-impossible, on considère que le support de X est $\mathbf{N}^\star$ plutôt que $\mathbf{N}$.

Propriété

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors la fonction de répartition de X vérifie : $\forall n \in \mathbf{N},\ F_X(n) = 1-(1-p)^n$.
On a donc aussi : $\mathbf{P}(X > n) = (1-p)^n$.

Proposition

La loi géométrique est une loi "sans mémoire" :
si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $\forall n, m \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}_{[X>m]}(X > m+n) = \mathbf{P}(X > n)$.

6 Loi de Poisson : loi des événements rares

Définition

Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^\star$. Une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi de Poisson de paramètre** λ lorsque :

• $X(\Omega) = \mathbf{N}$ • $\forall k \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Les lois de Poisson sont utilisées pour modéliser le nombre d'occurences par unité de temps d'un phénomène dont on connaît l'occurence moyenne λ. Par exemple, si on sait qu'en moyenne il y a 8 accidents par an à un carrefour donné, alors la VAR comptant le nombre d'accidents pendant une année fixée sera modélisée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 8$.

IV Moments d'une variable aléatoire réelle discrète

1 Moments d'ordre r

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle discrète, et soit $r \in \mathbf{N}$.
• Si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ est fini, on appelle **moment d'ordre** r de X le réel :

$$m_r(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^r \, \mathbf{P}(X = x_k).$$

• Si $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in \mathbf{N}\}$ et si la série $\sum_{k \geqslant 0} (x_k)^r \, \mathbf{P}(X = x_k)$ est **absolument convergente**,
alors le moment d'ordre r de X est la somme de cette série : $m_r(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} (x_k)^r \, \mathbf{P}(X = x_k)$.

Exercice 2 : Soit X une VAR discrète de loi : $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$ et $\forall k \geqslant 1,\ \mathbf{P}(X = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

1. Vérifier que cette formule définit bien la loi d'une VAR.
2. Montrer que X n'admet aucun moment d'ordre $r \geqslant 1$.

Proposition

Soit X une VAR discrète admettant un moment d'ordre $r \in \mathbf{N}$.
Soit $s \in \mathbf{N}$ tel que $s \leqslant r$. Alors X admet aussi un moment d'ordre s.

preuve :

2 Espérance

Définition

L'espérance d'une VAR discrète X est, s'il existe, son moment d'ordre 1 :

- Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors $\mathbf{E}(X) = m_1(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{P}(X = x_k)$
- Si $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in \mathbf{N}\}$ et si $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} x_k \mathbf{P}(X = x_k)$ est absolument convergente, alors :

$$\mathbf{E}(X) = m_1(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbf{P}(X = x_k)$$

Remarque :
L'espérance s'interprète comme la **moyenne** de X. C'est la valeur de X qu'on peut *espérer* obtenir.

Exercice 3 : Soit X une VAR discrète de loi : $X(\Omega) = \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\forall k \geqslant 2,\ \mathbf{P}(X = k) = \dfrac{k-1}{k!}$.

1. Montrer que : $\forall k \geqslant 2,\ \mathbf{P}(X = k) = \dfrac{1}{(k-1)!} - \dfrac{1}{k!}$.
2. En déduire que la formule proposée définit bien la loi d'une VAR X.
3. Montre que X possède une espérance, et calculer cette espérance.

Définition

Une VAR admettant une espérance nulle est dite **centrée**.

Propriété ** Linéarité de l'espérance **

Soient X, Y deux VAR discrètes définies sur le même univers Ω, admettant une espérance.
Alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance, et :

$$\boxed{\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mu \mathbf{E}(Y)}$$

preuve : Résultat admis.

Propriété ** Croissance de l'espérance **

Soient X, Y deux VAR discrètes définies sur le même univers Ω, admettant une espérance.
On suppose que : $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant Y(\omega)$. Alors : $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$.
En particulier : si $X \geqslant 0$ (*ie* : $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geqslant 0$), alors : $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$.

preuve :

Théorème ** Théorème de transfert **

Soit X une VAR discrète de support $X(\Omega)$, et soit $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbf{R}$. On pose $Y = f(X)$.

- Si $X(\Omega)$ est fini, alors : $\mathbf{E}(Y) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbf{P}(X = x)$.
- Si $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in \mathbf{N}\}$, alors Y admet une espérance ssi $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} f(x_k) \mathbf{P}(X = x_k)$ converge absolument. Dans ce cas, $\mathbf{E}(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f(x_k) \mathbf{P}(X = x_k)$.

preuve : Résultat admis.

3 Variance, écart-type

DÉFINITION

Soit X une VAR discrète telle que :
- X admet une espérance $\mathbf{E}(X)$;
- $X-\mathbf{E}(X)$ admet un moment d'ordre 2.

Alors on appelle **variance** de X et on note $\mathbf{V}(X)$ le réel : $\mathbf{V}(X)=\mathbf{E}\big((X-\mathbf{E}(X))^2\big)=m_2(X-\mathbf{E}(X))$.

Remarque : La variance est un *indicateur de dispersion* de la variable aléatoire autour de son espérance.

PROPOSITION ** Formule de KÖNIG HUYGENS **

Soit X une VAR discrète. Alors X admet une variance ssi elle admet un moment d'ordre 2.
On a dans ce cas : $\boxed{\mathbf{V}(X)=\mathbf{E}\big(X^2\big)-\mathbf{E}(X)^2}$

preuve :

PROPOSITION

Si X admet une variance, alors : $\boxed{\forall a,b\in\mathbf{R},\quad \mathbf{V}(aX+b)=a^2\mathbf{V}(X)}$

preuve :

PROPOSITION

Soit X admettant une variance. Alors : $\mathbf{V}(X)\geqslant 0$
et $\mathbf{V}(X)=0$ ssi X est presque sûrement constante.

preuve :

DÉFINITION

Soit X une VAR admettant une variance.
On appelle **écart-type** de X et on note $\sigma(X)$ le réel : $\sigma(X)=\sqrt{\mathbf{V}(X)}$
Si $\mathbf{E}(X)=0$ et $\sigma(X)=1$, alors on dit que X est **centrée réduite**.

PROPOSITION

Soit X une VAR admettant une variance non nulle. On pose $X^\star=\dfrac{X-\mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$.
Alors $X^\star$ est centrée réduite. $X^\star$ est la VAR **centrée réduite associée à X.**

preuve :

V Moments usuels à connaître

1 Loi certaine : Si X suit une loi certaine de valeur a, alors $\mathbf{E}(X)=a$ et $\mathbf{V}(X)=0$.

2 Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$: Si $X\hookrightarrow\mathcal{U}([\![1,n]\!])$, alors $\mathbf{E}(X)=\dfrac{n+1}{2}$.

3 Loi de Bernoulli : Si $X\hookrightarrow\mathcal{B}(p)$, alors $\mathbf{E}(X)=p$ et $\mathbf{V}(X)=p(1-p)$.

4 Loi binomiale : Si $X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$, alors $\mathbf{E}(X)=np$ et $\mathbf{V}(X)=np(1-p)$.

5 Loi géométrique : Si $X\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$, alors $\mathbf{E}(X)=\dfrac{1}{p}$ et $\mathbf{V}(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$.

6 Loi de Poisson : Si $X\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbf{E}(X)=\lambda$ et $\mathbf{V}(X)=\lambda$.

VI Simulations informatiques

1 Loi certaine de valeur a

```
def certaine(a) :
    return a
```

2 Loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$

```
import random as rd
def uniforme(a,b) :
    return rd.randint(a,b)
```

3 Loi de Bernoulli

```
import random as rd
def bernoulli(p) :
    return int(rd.random() < p)
```

4 Loi binomiale

```
import random as rd
def binomiale(n,p) :
    S = 0
    for _ in range(n) :
        S += rd.random() < p
    return S
```

```
import random as rd
def binomiale(n,p) :
    return sum( [ rd.random() < p for _ in range(n) ] )
```

5 Loi géométrique

```
import random as rd
def geometrique(p) :
    rang = 1
    while rd.random() > p :
        rang += 1
    return rang
```

6 Loi de Poisson

```
import random as rd
import numpy as np
def poisson(mu) :
    n, p = 0, np.exp(-mu)
    F = p
    r = rd.random()
    while F < r :
        n += 1
        p *= mu / n
        F += p
    return n
```

7 Lois quelconques

Situation 1 : deux listes données représentent la loi de probabilité d'une VAR X :

`V = [x0, ...,xn]` est la liste des valeurs prises par X : $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n\}$
`P = [p0, ..., pn]` est la liste correspondante des probabilités : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbf{P}(X = x_k) = p_k$.

```
import random as rd
def simulationX(V,P) :
    S, k, r = P[0], 0, rd.random()
    while S < r :
        k += 1
        S += P[k]
    return V[k]
```

Situation 2 : si $X(\Omega) = \mathbf{N}$ ou $\mathbf{N}^\star$, et si $\mathbf{P}(X = k)$ est donnée par une formule : $\mathbf{P}(X = k) = f(k)$:

```
import random as rd
def simulationX(f) :
    S, k, r = f(0), 0, rd.random()
    while S < r :
        k += 1
        S += f(k)
    return k
```