

I Généralisation de la notion d'intégrale sur un segment

1 Intégrale sur un intervalle I

Soit I un intervalle réel, et soit f une fonction **continue ou continue par morceaux** sur I .

Si I est un segment ($I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$), on sait déjà définir l'intégrale de f entre a et b .

Rappel : si f est continue sur $[a, b]$, alors elle admet une primitive F sur $[a, b]$ et on pose :

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Dans ce chapitre, on généralise cette définition à des intervalles I qui ne sont pas des segments :

$$I = [a, b[,]a, b],]a, b[, [a, +\infty[,]a, +\infty[,]-\infty, b[,]-\infty, b[,]-\infty, +\infty[.$$

DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle réel I .

Si I n'est pas un segment, alors $\int_I f$ est une intégrale **généralisée** (ou **impropre**).

On peut régler un cas simple :

DÉFINITION

Soit I un intervalle de bornes $a, b \in \mathbf{R}$, et soit f une fonction continue sur I .

Si I n'est pas un segment, et si f est prolongeable par continuité aux bornes de I

en une fonction \tilde{f} , alors on pose : $\int_I f = \int_a^b \tilde{f}(t) dt$.

On dira alors que l'intégrale de f sur I est **faussement généralisée**.

Exemple : Étude de $\int_{]0,1]} t \cdot \ln(t) dt$

2 Définition

a Intégrale sur $[a, b[$ ou $[a, +\infty[$

DÉFINITION

Soient $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. On pose $I = [a, b[$.

Soit f une fonction continue sur I , et soit F une primitive de f sur I .

On dit que l'intégrale généralisée $\int_I f$ **converge**, ou **existe** si et seulement si F possède une limite

finie en b . On définit alors : $\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a)$.

Dans le cas contraire, on dit que $\int_I f$ **diverge**.

Exercice 1 : Étudier l'existence (la convergence) et calculer le cas échéant les intégrales :

$$* I_1 = \int_{]0,1[} \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt \quad * I_2 = \int_{[1,+\infty[} \frac{dt}{t} \quad * I_3 = \int_{\mathbf{R}^+} e^{-t} dt$$

b Intégrale sur $]a, b]$ ou $]-\infty, b]$

DÉFINITION

Soient $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbf{R}$. On pose $I =]a, b]$.

Soit f une fonction continue sur I , et soit F une primitive de f sur I .

On dit que l'intégrale généralisée $\int_I f$ **converge**, ou **existe** si et seulement si F possède une limite

finie en a . On définit alors : $\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt = F(b) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$.

Dans le cas contraire, on dit que $\int_I f$ **diverge**.

Exercice 2 : Étudier l'existence (la convergence) et calculer le cas échéant les intégrales :

$$* I_4 = \int_{]0,1]} \frac{dt}{t} \quad * I_5 = \int_{]0,1]} \ln(t) dt \quad * I_6 = \int_{]-\infty, -1]} \frac{dt}{t^2}$$

c Intégrale sur $]a, b[$ ou $]-\infty, b[$ ou $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$

DÉFINITION

Soient $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. On pose $I =]a, b[$.

Soit f une fonction continue sur I , et soit F une primitive de f sur I .

On dit que l'intégrale généralisée $\int_I f$ converge, ou existe si et seulement si il existe $c \in I$ tel que

$\int_{]a, c]} f$ et $\int_{[c, b[} f$ convergent. On pose alors : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Dans le cas contraire, on dit que $\int_I f$ diverge.

Exercice 3 : Étudier l'existence et calculer le cas échéant les intégrales :

$$* I_7 = \int_{\mathbf{R}_+^*} \frac{dt}{t} \quad * I_8 = \int_{\mathbf{R}_+^*} \frac{dt}{t^2} \quad * I_9 = \int_{\mathbf{R}} \frac{dt}{1+t^2}$$

Méthode : si $\int_a^b f$ est impropre en a et en b , on choisit c tel que $a < c < b$ et on étudie séparément la convergence de $\int_a^c f$ et celle de $\int_c^b f$.

d Intégrale d'une fonction continue sur un segment sauf en un nombre fini de points

DÉFINITION

Soit $I = [a, b]$ un segment et f continue sur I sauf en $c_1, \dots, c_n \in I$.

On suppose $a \leq c_1 \leq \dots \leq c_n \leq b$, et on pose $c_0 = a$ et $c_{n+1} = b$.

Alors $\int_I f$ converge si et seulement si toutes les intégrales $\int_{c_k}^{c_{k+1}} f$ convergent, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On pose alors : $\int_a^b f = \sum_{k=0}^n \int_{c_k}^{c_{k+1}} f$. Dans le cas contraire, on dit que $\int_I f$ diverge.

Exercice 4 : Étudier l'existence et calculer le cas échéant les intégrales :

$$* I_{10} = \int_{[-1, 1]} \ln(|t|) dt \quad * I_{11} = \int_{[0, 2]} \frac{dt}{\sqrt{|t-1|}} \quad * I_{12} = \int_{[-2\pi, 2\pi]} \tan(t) dt$$

II Propriétés des intégrales impropre

1 Linéarité

PROPOSITION

Soient $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, et f, g continues sur l'intervalle I de bornes a et b .

Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Si $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent, alors $\int_I (\lambda f + \mu g)$ converge,

et dans ce cas : $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.

preuve :

2 Relation de Chasles

PROPOSITION

Soient $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, et f continue sur l'intervalle I de bornes a et b .

Soit c tel que : $a < c < b$. Alors $\int_I f$ converge si et seulement si $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent.

On a dans ce cas : $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$.

3 Positivité, croissance

PROPOSITION

- | Soient $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, et f, g continues sur l'intervalle I de bornes a et b .
 - * si $\int_I f$ converge et si $f \geq 0$ sur I , alors : $\int_a^b f \geq 0$.
 - * si $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent et si $f \leq g$ sur I , alors : $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
 - * si $\int_I f$ converge, si $f \geq 0$ sur I et si $\exists c \in I$, $f(c) > 0$, alors : $\int_a^b f > 0$.

Remarque : ce dernier résultat est appelé *stricte positivité* des intégrales généralisées.

Il s'énonce de façon équivalente : si $\int_I f$ converge et est nulle, si $f \geq 0$ sur I , alors f est nulle sur I .
preuves :

III Théorèmes de convergence

1 Théorème de comparaison

THÉORÈME ** Théorème de comparaison pour les fonctions positives **

Soit I un intervalle de bornes a, b avec $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.

Soient f et g deux fonctions continues telles que $0 \leq f \leq g$ sur I . Alors :

- * si $\int_I g$ converge, alors $\int_I f$ converge et on a : $0 \leq \int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- * si $\int_I f$ diverge, alors $\int_I g$ diverge aussi.

Exercice 5 : Étudier l'existence des intégrales :

$$* I_{13} = \int_{[1, +\infty[} \frac{dt}{1+t^3} \quad * I_{14} = \int_{]0, 1]} \frac{e^t}{t} dt \quad * I_{15} = \int_{\mathbf{R}_+} (e^t - 2)e^{-t^2} dt$$

2 Théorème d'équivalence

THÉORÈME ** Théorème d'équivalence pour les fonctions positives **

Soit I un intervalle de bornes a, b avec $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.

Soient f et g deux fonctions continues et **positives** sur I , et soit c tel que $a < c < b$.

* Cas où $b \notin I$: si $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$, alors $\int_c^b f$ et $\int_c^b g$ sont de même nature.

* Cas où $a \notin I$: si $f(t) \underset{t \rightarrow a}{\sim} g(t)$, alors $\int_a^c f$ et $\int_a^c g$ sont de même nature.

Exercice 6 : Étudier l'existence des intégrales :

$$* I_{16} = \int_{\mathbf{R}_+} \frac{2t-1}{t^3+t+1} dt \quad * I_{17} = \int_{\mathbf{R}_-} \frac{(t+1)e^t}{2t-1} dt \quad * I_{18} = \int_{]0, 1[} \frac{\ln(t)}{1-t} dt$$

3 Intégrales généralisées absolument convergentes

DÉFINITION

Soit I un intervalle de bornes a, b , et f continue sur I .

On dit que $\int_I f$ est **absolument convergente** si $\int_I |f|$ converge.

PROPOSITION

Si $\int_I f$ est absolument convergente, alors elle est convergente, et on a : $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

Attention : la réciproque de cette proposition est fausse. Il existe des intégrales généralisées convergentes qui ne sont pas absolument convergentes.

Exercice 7 : Étudier l'existence des intégrales :

$$* I_{19} = \int_{[1, +\infty[} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \quad * I_{20} = \int_{]0, 1]} \frac{\sin(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}} dt \quad * I_{21} = \int_{\mathbf{R}} \frac{\cos^2(t) + \cos(t)}{1+t^2} dt$$

IV Techniques de calcul

1 Application de la définition

Si on connaît une primitive F de f sur I , on étudie ses limites aux bornes de I pour savoir si $\int_I f$ converge.

2 Intégration par parties

THÉORÈME ** Intégration par parties (IPP) pour une intégrale généralisée **

Soient u, v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle I de bornes a et b . Soit $c \in]a, b[$.

* Cas où $b \notin I$: si uv possède une limite finie en b , et si $\int_c^b uv'$ converge, alors $\int_c^b u'v$ converge et : $\int_c^b u'v = \lim_{x \rightarrow b} u(x)v(x) - u(c)v(c) - \int_c^b uv'$

* Cas où $a \notin I$: si uv possède une limite finie en a , et si $\int_a^c uv'$ converge, alors $\int_a^c u'v$ converge et : $\int_a^c u'v = u(c)v(c) - \lim_{x \rightarrow a} u(x)v(x) - \int_a^c uv'$

Exercice 8 : Étudier l'existence, et calculer le cas échéant les intégrales :

$$* \quad I_{22} = \int_{\mathbf{R}_+} te^{-t} dt \quad * \quad I_n = \int_{[1, +\infty[} \frac{\ln(t)}{t^n} dt \quad (n \in \mathbf{N})$$

3 Changement de variables

THÉORÈME ** Changement de variable pour une intégrale généralisée **

Soient φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle J de bornes α et β , strictement monotone de J vers $I = \varphi(J)$. On sait que I est un intervalle de bornes a, b avec $a = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \varphi(x)$ et $b = \lim_{x \rightarrow \beta^-} \varphi(x)$.

Soit f continue sur I . Alors $\int_I f$ converge si et seulement si $\int_I \varphi' \times f \circ \varphi$ converge.

Dans ce cas, on a : $\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta \varphi'(x)f(\varphi(x)) dx.$

Exercice 9 : Calculer $* I_{23} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}} dt$ $* I_{24} = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$

PROPRIÉTÉ

Soit $b \in \mathbf{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, et soit $I =]-b, b[$. Soit f une fonction continue sur I .

Si f est paire ou impaire, alors $\int_0^b f$ et $\int_{-b}^0 f$ sont de même nature. En cas de convergence :

$$* \text{ si } f \text{ est paire, alors } \int_{-b}^b f = 2 \times \int_0^b f. \quad * \text{ si } f \text{ est impaire, alors } \int_{-b}^b f = 0.$$

$$Exemples : \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \times \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Exercice 10 : Calculer * $I_{25} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{1-t^2}$ * $I_{26} = \int_{-1}^1 \frac{t\sqrt{1-|t|}}{\cos(\frac{\pi t}{2})} dt$

V Intégrales impropreς célèbres

1 Intégrale de Gauss

PROPRIÉTÉ

L'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge et vaut : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$.

2 Intégrales de Riemann

PROPRIÉTÉ *!!!* *Hors-programme* *!!!*

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Une **intégrale de Riemann** est de la forme : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ ou $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$.

* $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, et vaut alors $\frac{1}{\alpha - 1}$.

* $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, et vaut alors $\frac{1}{1-\alpha}$.

* $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$.

Exercice 11 : Démontrer ces résultats.