

Dans ce chapitre, \mathbf{K} désigne \mathbf{R} ou \mathbf{C} .

I Polynômes à coefficients dans \mathbf{K}

1 Définition

DÉFINITION

On appelle **polynôme** à une indéterminée et à coefficients dans \mathbf{K} toute expression de la forme :

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = \sum_{k=0}^n a_kX^k$$

où $n \in \mathbf{N}$ et $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$. X est appelée l'indéterminée.

Les éléments a_0, a_1, \dots, a_n de \mathbf{K} sont les **coefficients** du polynôme P .

L'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans \mathbf{K} est noté $\mathbf{K}[X]$.

Exemples :

* La fonction polynomiale $f : \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto 2x^3 - 5x + 1 \end{cases}$ correspond au polynôme $P = 1 - 5X + 2X^3$.

* La fonction $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ M \mapsto 2M^3 - 5M + I_n \end{cases}$ correspond au même polynôme.

Cas Particuliers :

- On appelle **polynôme constant** tout polynôme de la forme a_0 où $a_0 \in \mathbf{K}$.
- Le **polynôme nul** est celui dont tous les coefficients sont nuls. On le note 0.
- On appelle **monôme** tout polynôme de la forme a_nX^n où $n \in \mathbf{N}$ et $a_n \in \mathbf{K}$.

2 Égalité de polynômes

Deux polynômes $P = \sum_{k=0}^p a_kX^k$ et $Q = \sum_{k=0}^q b_kX^k$ sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes coefficients :

$\forall k \in \mathbf{N}, a_k = b_k$, en convenant que : $\forall k > p, a_k = 0$ et $\forall k > q, b_k = 0$.

MÉTHODE : Lorsque deux polynômes sont égaux, on **identifie** leurs coefficients.

CAS PARTICULIER : Un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.

Exercice 1 : Déterminer $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que $(a - 1)X^3 + (a + b)X^2 + (b - c)X = 6X^2 + 2X$.

3 Degré d'un polynôme

DÉFINITION

* Soit $P = \sum_{k=0}^n a_kX^k$ un polynôme non nul.

On appelle **degré de P** et on note $\deg(P)$ le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.

On convient que $\deg(0) = -\infty$.

* Soit $n \in \mathbf{N}$.

On note $\mathbf{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans \mathbf{K} .

Exemples :

- $\deg(X^2 + 5X^3 - X^9) = 9$.
- $\deg\left(\sum_{k=0}^n a_kX^k\right) \leq n$ avec égalité si, et seulement si $a_n \neq 0$.
- Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Alors P est constant si, et seulement si $\deg(P) \leq 0$.
- $\mathbf{R}_2[X] = \{aX^2 + bX + c, (a, b, c) \in \mathbf{R}^3\}$.

C'est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré 2, 1, 0 ou $-\infty$.

Lorsque $\deg(P) = 2$, on dit que P est un *trinôme*.

DÉFINITION

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de degré n (donc $a_n \neq 0$). Alors :

- * $a_n X^n$ est appelé **monôme dominant** de P .
- * a_n est appelé **coefficients dominants** de P .
- * Lorsque le coefficient dominant est égal à 1, le polynôme P est dit **unitaire**.

Exemple : $8X^2 + 4X^7$ a pour monôme dominant $4X^7$ et pour coefficient dominant 4.

II Opérations sur les polynômes

1 Combinaisons linéaires sur $\mathbf{K}[X]$

Soient $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$ dans $\mathbf{K}[X]$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$.

DÉFINITION

On définit la somme $P + Q$ et le produit $\lambda.P$ par :

- * $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k) X^k$, avec la convention que $a_k = 0$ si $k > p$ et $b_k = 0$ si $k > q$.
- * $\lambda.P = \sum_{k=0}^p \lambda a_k X^k$.

Une **combinaison linéaire** de P et Q est un polynôme $\lambda P + \mu Q$, avec $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$.

PROPRIÉTÉ

1. $\forall P, Q \in \mathbf{K}[X], \deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$
2. $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall P \in \mathbf{K}[X], \deg(\lambda.P) = \begin{cases} \deg P & \text{si } \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$

Remarque : Si P et Q ont des degrés différents, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$.

PROPOSITION

- * $(\mathbf{K}[X], +, .)$ est un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension infinie.
- * $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ de dimension $n + 1$.

preuves :

PROPRIÉTÉ

- | Toute famille de polynômes non nuls de $\mathbf{K}[X]$ de degrés 2 à 2 distincts est libre.
- preuve :*

PROPOSITION

- | Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.
- | On l'appelle la **base canonique** de $\mathbf{K}_n[X]$.

2 Multiplication des polynômes

Soient $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$ dans $\mathbf{K}[X]$.

DÉFINITION

On définit le produit PQ par : $PQ = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$ avec $\forall k \in \llbracket 0, p+q \rrbracket$, $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$

avec comme précédemment la convention que : $a_k = 0$ si $k > p$ et $b_k = 0$ si $k > q$.

Exemple : Soient $P = 1 + 3X - X^2$ et $Q = X + X^2$. On a :

k	0	1	2	3	4
a_k	1	3	-1	0	0
b_k	0	1	1	0	0
c_k	0	1	4	2	-1

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0 = 0 \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1 \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 4 \\ c_3 &= a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 2 \\ c_4 &= a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0 = -1 \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement : $PQ = X + 4X^2 + 2X^3 - X^4$.

PROPRIÉTÉ

- * Le produit des polynômes est associatif, commutatif, et il admet un élément neutre, le polynôme constant égal à 1 :
 $\forall P, Q, R \in \mathbf{K}[X], P(QR) = (PQ)R = PQR, \quad PQ = QP \quad \text{et} \quad P \times 1 = 1 \times P = P.$
- * La multiplication des polynômes est distributive par rapport à l'addition :
 $\forall P, Q, R \in \mathbf{K}[X], P(Q+R) = PQ + PR.$
- * $\forall P, Q \in \mathbf{K}[X], \deg(PQ) = \deg P + \deg Q$
- * Les seuls polynômes inversibles sont les polynômes constants non nuls.
- * $\forall P, Q \in \mathbf{K}[X], \quad PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0.$

preuves :

3 Composition

DÉFINITION

La composée des polynômes $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k \in \mathbf{K}[X]$
est définie par : $P \circ Q = P(Q(X)) = \sum_{k=0}^p a_k \left(\sum_{j=0}^q b_j X^j \right)^k$. C'est encore un polynôme de $\mathbf{K}[X]$.

Exemples : Soient $P = X^2 - 1$ et $Q = X + 1$.

Alors $P \circ Q = (X + 1)^2 - 1 = X^2 + 2X$ et $Q \circ P = (X^2 - 1) + 1 = X^2$.

PROPRIÉTÉ

- * La composée des polynômes **n'est pas** commutative.
- * $\forall P, Q \in \mathbf{K}[X]$, si P, Q sont non nuls, alors : $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

preuve :

III Dérivation dans $\mathbf{K}[X]$

1 Dérivée d'un polynôme

DÉFINITION

Soit $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$. On définit le **polynôme dérivé de P** , noté P' , par :

$$P' = \sum_{k=1}^p k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{p-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$

On définit le **polynôme dérivé n -ième de P** , noté $P^{(n)}$, par récurrence :

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall k \in \mathbf{N}, \quad P^{(k+1)} = (P^{(k)})' \end{cases}$$

Exemple : si $P \in \mathbf{K}_0[X]$, alors $P' = 0$.

Remarque : cette définition correspond à la dérivée des fonctions polynomiales d'une variable réelle.

2 Propriétés de la dérivée

PROPRIÉTÉ

- * $\forall P \in \mathbf{K}[X], \deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg P \geq 1 \\ -\infty & \text{si } \deg P \leq 0 \end{cases}$
- * $\forall P \in \mathbf{K}[X], \deg(P) \leq n \Rightarrow P^{(n+1)} = 0$

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soit $P = X^n$. Déterminer $P^{(n)}$.

PROPRIÉTÉ

- * $\forall P, Q \in \mathbf{K}[X], \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$.
- * $\forall P, Q \in \mathbf{K}[X], (PQ)' = P'Q + PQ'$.
- * $\forall P \in \mathbf{K}[X], \forall n \in \mathbf{N}, (P^n)' = nP'P^{n-1}$.
- * $\forall P, Q \in \mathbf{K}[X], (P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$.

preuves :

IV Racines d'un polynôme

1 Définition

DÉFINITION

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{K}$.

On dit que α est une racine de P (ou un zéro de P) lorsque $P(\alpha) = 0$.

Exemple : on trouve les racines dans \mathbf{K} d'un polynôme P de degré 2 en calculant son discriminant.
Si $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$, on pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

Cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$: * Si $\Delta \geq 0$, on pose : $\alpha = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

α et β sont les racines de P ($\alpha = \beta$ quand $\Delta = 0$) et $P = a(X - \alpha)(X - \beta)$

* Si $\Delta < 0$, alors P n'a pas de racine réelle (et ne peut se factoriser).

Cas où $\mathbf{K} = \mathbf{C}$: Soit $\delta \in \mathbf{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On pose : $\alpha = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $\beta = \frac{-b + \delta}{2a}$

Alors α et β sont les racines de P ($\alpha = \beta$ quand $\Delta = 0$) et $P = a(X - \alpha)(X - \beta)$

Lorsque les coefficients a, b, c sont réels :

$$\Delta \geq 0 \implies (\delta = \sqrt{\Delta} \text{ et } \alpha, \beta \in \mathbf{R}) \text{ et } \Delta < 0 \implies (\delta = i\sqrt{-\Delta} \text{ et } \beta = \bar{\alpha}).$$

2 Divisibilité dans $\mathbf{K}[X]$

DÉFINITION

Soient $A, B \in \mathbf{K}[X]$. On dit que B divise A s'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$.

On note alors $B|A$, et on dit que B est un diviseur de A ou que A est un multiple de B .

Exemples :

- $(X - 1)|(X^2 - 1)$ car $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$.
- Tous les polynômes divisent 0.
- Si $\deg P = 0$, alors P divise tout polynôme.
- $\forall P \in \mathbf{K}[X], 0|P \Leftrightarrow P = 0$.
- Si $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ et $P|Q$ avec $Q \neq 0$, alors $\deg P \leq \deg Q$.

Exercice 3 : Montrer que $\forall n \geq 2, X^2|(X + 1)^n - nX - 1$.

3 Caractérisation des racines

THÉORÈME

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{K}$.
 α est une racine de P si, et seulement si P est divisible par $X - \alpha$.

preuve :

COROLLAIRE

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Si P admet n racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, alors P est divisible par $\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$.

preuve :

THÉORÈME

| Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ de degré $n \geq 0$. Alors P possède au maximum n racines.

preuve :

MÉTHODE : on utilise la formulation équivalente suivante pour démontrer qu'un polynôme est nul : Si un polynôme de degré inférieur ou égal à n possède au moins $n + 1$ racines, alors il est nul.

Exemple : la fonction \cos n'est pas polynomiale.

Exercice 4 :

Soit P un polynôme dont la fonction polynomiale associée sur \mathbf{R} est périodique de période $T > 0$. Montrer que P est le polynôme nul.

4 Multiplicité d'une racine

DÉFINITION

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{K}$. Soit α une racine de P .

On appelle **multiplicité de la racine α dans P** le plus grand entier n tel que $(X - \alpha)^n | P$.

Remarques :

- * On parle de racine *simple*, *double*, *triple*... quand la multiplicité vaut 1, 2, 3, ...
- * Si α n'est pas une racine de P , alors sa multiplicité vaut 0 par convention.
- * Si $(X - \alpha)^k | P$ avec $k \geq 1$, alors la multiplicité de α est $\geq k$.

On pourra donc parler de racines *au moins simples*, *au moins doubles* ...

Exemple : Soit $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$. Si $\Delta = 0$, alors $-\frac{b}{2a}$ est une racine double de P .

Exercice 5 :

Déterminer les racines de $P = (X - 1)(X^2 - 1)(X^3 - 1)(X^4 - 1) \in \mathbf{R}[X]$ et leurs multiplicités.

PROPOSITION

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{K}$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- * α est une racine de P de multiplicité m .
- * $\exists Q \in \mathbf{K}[X], P = (X - \alpha)^m Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.
- * $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

preuve :

Exercice 6 : Déterminer toutes les racines et leurs multiplicité de $P = X^4 - 6X^2 + 8X - 3$.

PROPOSITION

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Si P admet n racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de multiplicités respectives m_1, m_2, \dots, m_n , alors P est divisible par $\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{m_k}$.

V Décomposition d'un polynôme

1 Polynôme scindé

DÉFINITION

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme non nul. On dit que P est **scindé** lorsqu'il est constant, ou lorsqu'il s'écrit comme un produit de facteurs de degré 1.

Exemples :

* $4(X - 2)(X - 3)^5$ est scindé.

* $X^2 + 1$ n'est pas scindé dans $\mathbf{R}[X]$. Il l'est dans $\mathbf{C}[X]$ car : $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$.

2 Factorisation dans $\mathbf{C}[X]$

THÉORÈME ** Théorème de d'Alembert-Gauss **

| Dans $\mathbf{C}[X]$, tout polynôme non nul est scindé.

preuve : Théorème admis.

COROLLAIRE

Dans $\mathbf{C}[X]$, tout polynôme non constant admet au moins une racine.

Il s'écrit sous la forme :
$$P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{m_k}$$
 où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les racines de P

de multiplicités m_1, \dots, m_n et λ est le coefficient dominant de P . On a : $\deg(P) = \sum_{k=1}^n m_k$.

preuve :

Exercice 7 : Soit $P = X^n - 1$ avec $n \geq 1$. Factoriser P dans $\mathbf{C}[X]$.

3 Factorisation dans $\mathbf{R}[X]$

PROPOSITION

| Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{C}$. Si α est une racine de P de multiplicité m , alors $\bar{\alpha}$ est une racine de P de multiplicité m également.

preuve :

PROPOSITION ** Factorisation dans $\mathbf{R}[X]$ (hors-programme) **

| Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Alors P se factorise dans $\mathbf{R}[X]$ sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^s (a_\ell X^2 + b_\ell X + c_\ell)^{n_\ell}$$

où λ est le coefficient dominant de P , $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les racines réelles de P de multiplicités respectives m_1, \dots, m_r , et où $(a_\ell X^2 + b_\ell X + c_\ell)$ sont des trinômes de discriminant $\Delta_\ell < 0$.

MÉTHODES : Pour factoriser un polynôme P :

- * on factorise par X (ou par X^k) si X (ou X^k) est facteur commun
- * on repère les identités remarquables quand il y en a
- * si $P = aX^2 + bX + c$ et qu'on repère une racine évidente α , alors $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ permet de trouver l'autre racine β , et on factorise P en $P = a(X - \alpha)(X - \beta)$
- * on utilise Δ si $\deg(P) = 2$ et si P n'a pas de racine évidente
- * on factorise par $(X - \alpha)$ si on repère une racine évidente α
- * si $\deg(P)$ est assez grand et qu'on repère une racine évidente α , on étudie sa multiplicité m en calculant $P'(\alpha), P''(\alpha) \dots$ jusqu'à trouver un résultat non nul. On factorise alors par $(X - \alpha)^m$
- * si P ne comporte que des puissances paires de X (ou multiples de 3, de 4 ...), alors on pose $T = X^2$ (ou $T = X^3, X^4 \dots$) et on factorise le polynôme Q tel que : $P = Q \circ T$

Quand P est à coefficients réels :

- * si z est une racine complexe de P , alors on factorise par $(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2$
 - * si z est une racine complexe de P de multiplicité m , alors on factorise par :
- $$(X - z)^m (X - \bar{z})^m = (X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2)^m$$
- * si on sait factoriser P dans $\mathbf{C}[X]$, on regroupe les facteurs conjugués pour obtenir la factorisation dans $\mathbf{R}[X]$

Exercice 8 : Factoriser $P = X^9 - X^7 + X^5 - X^3$ dans $\mathbf{R}[X]$.