Correction du DM 4

Une suite de polynômes

On définit les polynômes $P_n \in \mathbf{R}[X]$ par : $\begin{cases} P_0 = 2 \\ P_1 = X \\ \forall n \in \mathbf{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n \end{cases}$

1. $P_2 = XP_1 - P_0 = X^2 - 2$ puis $P_3 = XP_2 - P_1 = X(X^2-2) - X = X^3 - 3X$,
   et enfin : $P_4 = XP_3 - P_2 = X(X^3-3X) - (X^2-2) = X^4 - 4X^2 + 2$.
   Conclusion : $\boxed{P_2 = X^2 - 2,\ P_3 = X^3 - 3X \text{ et } P_4 = X^4 - 4X^2 + 2.}$

2. On factorise facilement : $\boxed{P_2 = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2}) \text{ et } P_3 = X(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3}).}$
   On pose $t = X^2$, de sorte que $P_4 = t^2 - 4t^2 + 2$. On calcule $\Delta = 8 > 0$ donc on trouve deux racines réelles distinctes : $t_1 = \dfrac{4+\sqrt{8}}{2} = 2 + \sqrt{2}$ et $t_2 = 2 - \sqrt{2}$, toutes deux positives.
   Il vient donc : $P_4 = (X^2 - t_1)(X^2 - t_2) = (X - \sqrt{t_1})(X + \sqrt{t_1})(X - \sqrt{t_2})(X + \sqrt{t_2})$.
   Conclusion : $\boxed{P_4 = \left(X - \sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(X + \sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(X - \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left(X + \sqrt{2-\sqrt{2}}\right).}$

3. On procède par récurrence double. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose :
   $$\mathcal{P}_n : \ll\ P_n = X^n + Q_n \quad \text{où } Q_n \in \mathbf{R}_{n-1}[X]\ \gg.$$
   Cette propriété traduit le fait que P_n est unitaire et de degré n.
   • Initialisation-double à partir du rang $n = 1$:
   $P_1 = X = X^1 + 0$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie. $P_2 = X^2 + (-2)$ donc $\mathcal{P}_2$ est vraie.
   • Hérédité-double à partir du rang $n = 1$:
   Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ vraies.
   Alors : $P_n = X^n + Q_n$ et $P_{n+1} = X^{n+1} + Q_{n+1}$ avec $\deg(Q_n) \leqslant n-1$ et $\deg(Q_{n+1}) \leqslant n$.
   On a alors : $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n = X(X^{n+1} + Q_{n+1}) - (X^n + Q_n)$
   $= X^{n+2} + Q_{n+2}$ en posant $Q_{n+2} = XQ_{n+1} - X^n - Q_n$.
   On a : $\deg(Q_{n+2}) \leqslant \deg(Q_{n+1}) + 1 \leqslant n+1$ donc $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.
   • D'après le principe de récurrence, $\forall n \geqslant 1,\ \mathcal{P}_n$ est vraie.
   Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1, P_n \text{ est unitaire et } \deg(P_n) = n.}$

4. Soit x un réel non nul. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose : $\mathcal{Q}_n : \ll\ P_n\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^n + \dfrac{1}{x^n}\ \gg$.
   • Initialisations pour $n = 0$ et $n = 1$: $P_0 = 2$ et $x^0 + \dfrac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2$ donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.
   $$P_1\left(x + \frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x} \text{ donc } \mathcal{Q}_1 \text{ est vraie.}$$
   • Hérédité à partir du rang 0 : soit $n \geqslant 0$. On suppose $\mathcal{Q}_n$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$ vraies.
   $$\begin{aligned} \text{Alors } P_{n+2}\left(x+\frac{1}{x}\right) &= \left(x+\frac{1}{x}\right)P_{n+1}\left(x+\frac{1}{x}\right) - P_n\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right) - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) \\ &= x^{n+2} + \frac{1}{x^n} + x^n + \frac{1}{x^{n+2}} - x^n - \frac{1}{x^n} \ = \ x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}. \end{aligned}$$
   Ainsi, $\mathcal{Q}_{n+2}$ est vraie.
   • D'après le principe de récurrence, $\forall n \geqslant 0,\ \mathcal{Q}_n$ est vraie.
   Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbf{R}^\star,\ \forall n \in \mathbf{N},\ P_n\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^n + \dfrac{1}{x^n}.}$

5. Application : On pose $Q = X^4 - 3\sqrt{5}X^3 + 12X^2 - 3\sqrt{5}X + 1$. Soit x une racine réelle de Q.

   (a) $Q(0) = 1 \neq 0$ donc 0 n'est pas racine de Q : $\boxed{x \neq 0.}$

   $Q(x) = 0$ et $x \neq 0$ donc $\dfrac{Q(x)}{x^2} = 0$, soit : $\boxed{\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 3\sqrt{5}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 12 = 0.}$

   (b) D'après la question **4**, $P_2(t) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ donc $\boxed{P_2(t) - 3\sqrt{5}t + 12 = 0 \quad (1).}$

   (c) $(1) \Leftrightarrow (t^2 - 2) - 3\sqrt{5}t + 12 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3\sqrt{5}t + 10 = 0$.
   On calcule le discriminant : $\Delta = 5 > 0$ donc on trouve deux solutions réelles distinctes.
   $(1) \Leftrightarrow t = \dfrac{3\sqrt{5} - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ ou $t = \dfrac{3\sqrt{5} + \sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$. $\boxed{\mathcal{S}_{(1)} = \{\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\}.}$

   (d) $t = x + \dfrac{1}{x}$ donc on peut écrire deux équations d'inconnue $x \neq 0$:

   $* \ x + \dfrac{1}{x} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$, $\Delta = 1$ et $x = \dfrac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$;

   $* \ x + \dfrac{1}{x} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$, $\Delta = 16$ et $x = \dfrac{2\sqrt{5} \pm 4}{2} = \sqrt{5} \pm 2$.

   $\boxed{Q \text{ possède 4 racines réelles : } x_1 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2},\ x_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\ x_3 = \sqrt{5}+2,\ x_4 = \sqrt{5}-2.}$

   (e) Forme factorisée de Q : $\boxed{Q = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)}$, car Q est unitaire.

6. Traitement informatique

   (a)
```
def mult_scalaire(L,a) :
    M = []
    for elt in L :
        M.append(a*elt)
    return M
```

   (b)
```
def mult_X(L) :
    return [0] + L
```

   (c)
```
def somme(L1, L2) :
    n1, n2 = len(L1), len(L2)
    N, M = max(n1,n2), []
    for k in range(N) :
        if k >= n1 : M.append(L2[k])
        elif k >= n2 : M.append(L1[k])
        else : M.append(L1[k]+L2[k])
    return M
```

   (d)
```
def P(n) :
    L0, L1 = [2], [0,1]
    for k in range(n) :
        L2 = somme( mult_X(L1), mult_scalaire(L0,-1) )
        L1, L0 = L2, L1
    return L0
```