I Dénombrabilité

1 Ensemble dénombrable

Définition

Soit E un ensemble non vide.

- S'il existe un entier $n \geqslant 1$ et une bijection φ de $[\![1,n]\!]$ dans E, alors E est un **ensemble fini** de **cardinal** n. On peut alors décrire l'ensemble E en extension : $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- S'il existe une bijection φ de $\mathbf{N}$ dans E, alors E est **infini dénombrable**.
  On peut alors décrire E sous la forme : $E = \{x_i,\ i \in \mathbf{N}\}$ avec $\forall i \in \mathbf{N},\ x_i = \varphi(i)$.

Cas particulier : il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément.
C'est **l'ensemble vide**. On le note $\varnothing$. Son cardinal est 0.

Exemples : $E_1 = \{p \in \mathbf{N} \mid 10 \leqslant p^2 \leqslant 50\}$ est fini de cardinal $n = 4$. En effet, $E_1 = \{4, 5, 6, 7\}$.
On peut énumérer : $E_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ avec $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $x_3 = 6$ et $x_4 = 7$.

L'ensemble E_2 des entiers naturels pairs est infini dénombrable.
On peut le décrire comme : $E_2 = \{2i,\ i \in \mathbf{N}\}$ donc $E_2 = \{x_i,\ i \in \mathbf{N}\}$ avec $x_i = 2i$.

Définition

Soit E un ensemble. S'il n'existe aucune application surjective de $\mathbf{N}$ dans E, on dit que E est **infini non dénombrable**.

Exemples : L'ensemble $\mathbf{R}$ des réels est infini non dénombrable.
Si I est un intervalle réel non vide, non réduit à un point, alors I est infini non dénombrable.

2 Unions et intersections dénombrables

Définition

Soient A_i ($i \in \mathbf{N}$) des ensembles.

- L'intersection de tous les ensembles A_i est : $\displaystyle\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i = \{x \mid \forall i \in \mathbf{N},\ x \in A_i\}$.
- L'union (réunion) de tous les ensembles A_i est : $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i = \{x \mid \exists i \in \mathbf{N},\ x \in A_i\}$.

Exemples : On pose pour tout $i \in \mathbf{N}$, $A_i = \left[-\dfrac{1}{i+1}, \dfrac{1}{i+1}\right]$, et $B_i = [i, i+1[$.

Alors : $\displaystyle\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i = \{0\}$, $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i = [-1, 1] = A_0$, $\displaystyle\bigcap_{i=0}^{+\infty} B_i = \varnothing$ et $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i = \mathbf{R}_+$.

3 Rappels de dénombrement sur des ensembles finis

Dans ce paragraphe, les ensembles considérés sont finis.

Proposition

- $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$
- $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B)$ si A et B sont disjoints ($A \cap B = \varnothing$)
- si $A \subset E$, alors $\operatorname{card}(E \setminus A) = \operatorname{card}(E) - \operatorname{card}(A)$
- $\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F)$
- $\operatorname{card}(E^p) = \big(\operatorname{card}(E)\big)^p$
- si $\operatorname{card}(E) = n$, alors : le nombre de p-listes de E est n^p
  le nombre d'arrangements de E est $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leqslant n$
  le nombre de permutations de E est $A_n^n = n!$
  le nombre de p-combinaisons de E est $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \leqslant n$
  le nombre de parties de E est $\operatorname{card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^n$

II Probabilité sur un univers Ω

1 Tribu, événements

Soit Ω un ensemble non vide, indifféremment fini, dénombrable ou non dénombrable.

Définition

- Une **tribu** $\mathcal{T}$ sur Ω est un ensemble de parties de Ω vérifiant :
  1. $\Omega \in \mathcal{T}$
  2. $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire dans Ω : $\forall A \in \mathcal{T},\ \Omega \setminus A \in \mathcal{T}$
  3. $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable : si $\forall i \in \mathbf{N},\ A_i \in \mathcal{T}$, alors $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i \in \mathcal{T}$
- Si $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω, alors on dit que $(\Omega, \mathcal{T})$ est un **espace probabilisable** et les éléments A de $\mathcal{T}$ sont appelés **événements**.

Exemples : $\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu sur Ω, appelée *tribu grossière*.
$\mathcal{T}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$ (ensemble de toutes les parties de Ω) est une tribu sur Ω, appelée *tribu discrète*.

Proposition

Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. Alors :
* $\varnothing \in \mathcal{T}$.
* $\mathcal{T}$ est stable par unions finies.
* $\mathcal{T}$ est stable par intersections finies ou dénombrables.

preuves :

Définition ** Vocabulaire des événements **

- L'univers Ω est l'événement certain, $\varnothing$ est l'événement impossible.
- si $A = \{x\} \in \mathcal{T}$ est un singleton, on dit que A est un événement élémentaire.
- le complémentaire $\Omega \setminus A$ d'un événement A, noté $\overline{A}$, est l'événement contraire de A.
- si $A \subset B$, on dit que l'événement A implique l'événement B.
- si $A \cap B = \varnothing$ (ensembles disjoints), on dit que les événéments A et B sont incompatibles.
- $A \cap B$ est l'événement "A et B".
- $A \cup B$ est l'événement "A ou B".

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Un **système complet d'événements** (SCE) est une famille d'événements $(A_i)_{i \in I}$ avec $I = [\![1, n]\!]$ ou $I = \mathbf{N}$ telle que :
1. $\forall i \in I,\ A_i \neq \varnothing$
2. $\forall i, j \in I,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$
3. $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$

Exemples fondamentaux : si $A \in \mathcal{T}$, alors $\left(A, \overline{A}\right)$ est un SCE.
si $\Omega = \{x_i,\ i \in I\}$, alors $\left(\{x_i\}\right)_{i \in I}$ est un SCE.

2 Espace probabilisé

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Soit $\mathbf{P}$ une application vérifiant :
1. $\mathbf{P} : \mathcal{T} \longrightarrow [0, 1]$
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
3. Soit $I = [\![1, n]\!]$ ou $I = \mathbf{N}$, et soient A_i $(i \in I)$ des événements **deux à deux disjoints**.
   Alors $\displaystyle\mathbf{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbf{P}(A_i)$

alors $\mathbf{P}$ s'appelle **une probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{T})$ et $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ est un **espace probabilisé**.

Remarque : le troisième axiome des probabilités s'appelle **la σ-additivité**.

Si $I = \mathbf{N}$, il implique que la série $\sum_{i\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(A_i)$ est absolument convergente, et de somme $\leqslant 1$.

PROPRIÉTÉ

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soient $A, B \in \mathcal{T}$ deux événements. Alors :

- $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$
- si $A \subset B$, alors $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$
- $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$
- $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$
- si $(A_i)_{i\in I}$ est un SCE, alors $\sum_{i\in I} \mathbf{P}(A_i) = 1$.

preuves :

DÉFINITION

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, et soit $A \in \mathcal{T}$ un événement.
- si $\mathbf{P}(A) = 1$, on dit que A est **quasi-certain**, ou **presque sûr**.
- si $\mathbf{P}(A) = 0$, on dit que A est **quasi-impossible**, ou **négligeable**.
- si $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements de probabilités non nulles, deux-à-deux disjoints vérifie : $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1$, alors on dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un **système quasi-complet d'événements** (SQCE).

Exemple : on jette une pièce bien équilibrée jusqu'à obtenir 'Pile'.
Les issues de cette expérience aléatoire sont les suites finies $FF\ldots FP$ de résultats pour lesquels on a obtenu n 'Face' puis un 'Pile', notées ω_n, ainsi que la suite infinie $FFF\ldots$ pour laquelle on n'obtient que des 'Face', notée ω_∞ : $\Omega = \{\omega_n,\ n \in \mathbf{N}\} \cup \{\omega_\infty\}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(\omega_n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\omega_n) = 1$ en reconnaissant une série géométrique.

Ainsi, $\big(\{\omega_n\}\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est un SQCE de Ω. On a donc : $\mathbf{P}\big(\{\omega_\infty\}\big) = 0$.

L'événement $\{\omega_\infty\}$ est quasi-impossible, *ie* : la probabilité de n'obtenir que des 'Face' est nulle.

III Probabilités conditionnelles

1 Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

DÉFINITION

Soit $A \in \mathcal{T}$ de probabilité non nulle. Pour tout événement $B \in \mathcal{T}$, la **probabilité conditionnelle de B sachant (que) A (est réalisé)** est :

$$\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B \mid A) = \frac{\mathbf{P}(B \cap A)}{\mathbf{P}(A)}.$$

L'application $\mathbf{P}_A : \mathcal{T} \longrightarrow [0, 1]$ est une probabilité, appelée **probabilité conditionnelle sachant A**.

preuve :

2 Formule des probabilités composées (FPC)

PROPOSITION

Soit $A \in \mathcal{T}$ tel que $\mathbf{P}(A) \neq 0$. Alors : $\forall B \in \mathcal{T},\ \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(B)$.
Généralisation : si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$ avec $\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \ldots \times \mathbf{P}_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Exercice 1 :

Soient a et b des entiers naturels non nuls. On considère une urne contenant a boules blanches et b boules rouges indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise les boules de l'urne. Quelle est la probabilité que l'on tire d'abord toutes les boules blanches ?

3 Formule des probabilités totales (FPT)

Proposition

Soit $\left(A_i\right)_{i\in I}$ un SCE ou un SQCE, avec $I = [\![1,n]\!]$ ou $I = \mathbf{N}$. Alors pour tout $B \in \mathcal{T}$:

$*$ (si $I = \mathbf{N}$) la série $\sum_{i\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(A_i) \times \mathbf{P}_{A_i}(B)$ est absolument convergente,

$*$ $\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) \times \mathbf{P}_{A_i}(B)$ ou $\mathbf{P}(B) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_i) \times \mathbf{P}_{A_i}(B)$

Exercice 2 : On lance une pièce bien équilibrée, et on appelle n le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un 'Pile'. On considère ensuite une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On pioche au hasard une boule. Quelle est la probabilité qu'elle porte le numéro 1 ?

4 Formule de Bayes

Proposition

Soient $A, B \in \mathcal{T}$ de probabilités non nulles. Alors : $\mathbf{P}_B(A) = \dfrac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} \times \mathbf{P}_A(B)$

Exercice 3 : Dans une population, 20% des gens sont vaccinés contre une maladie. Lors d'une épidémie, 60% des gens non vaccinés sont malades, et 10% des gens vaccinés sont malades.
On choisit au hasard une personne malade. Quelle est la probabilité qu'elle soit vaccinée ?

IV Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

Définition

$*$ Deux événements $A, B \in \mathcal{T}$ sont **indépendants** si et seulement si : $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.

$*$ Soit $\left(A_i\right)_{i\in I}$ une famille d'événements. Les événements A_i sont **mutuellement indépendants** si et seulement si : $\forall J \subset I,\ J$ fini, on a : $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbf{P}(A_i)$.

Exercice 4 : on jette deux fois un dé bien équilibré. On considère les événements :
A : " le premier résultat est pair " B : " le second résultat est impair " C : " les deux résultats sont de parités contraires ". Étudier l'indépendance de A, B et C.

Proposition

Soient A et B deux événements indépendants. Alors :
- $*$ A et $\overline{B}$ sont indépendants,
- $*$ $\overline{A}$ et B sont indépendants,
- $*$ $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Ce résultat se généralise à une famille finie ou dénombrable d'événements indépendants.

Exercice 5 : on passe une série infinie de tests, mutuellement indépendants, et de plus en plus faciles : pour tout entier $n \geqslant 1$, la probabilité de réussir le $n^{\text{ème}}$ test est $p_n = \dfrac{n}{n+1}$.
Quelle est la probabilité de réussir tous les tests ?

V Variables aléatoires

1 Définition

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Une **variable aléatoire réelle (VAR)** sur Ω est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que : $\forall a \in \mathbf{R},\ \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leqslant a\} \in \mathcal{T}$.

En notant $[X \leqslant a] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leqslant a\}$, on obtient la formulation suivante :
X est une VAR si et seulement si : $\forall a \in \mathbf{R},\ [X \leqslant a]$ est un événement.

On note alors $X(\Omega) = \{X(\omega),\ \omega \in \Omega\}$ **l'univers-image** ou **support** de la VAR X.

Notations : a, b sont des réels tels que $a < b$

* $[X \leqslant a] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leqslant a\}$
* $[X < a] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) < a\}$
* $[X \geqslant a] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \geqslant a\}$
* $[X > a] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) > a\}$
* $[X = a] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = a\}$
* $\big[a \leqslant X \leqslant b\big] = \{\omega \in \Omega \,|\, a \leqslant X(\omega) \leqslant b\}$
* $\big[a < X < b\big] = \{\omega \in \Omega \,|\, a < X(\omega) < b\}$
* $\big[a < X \leqslant b\big] = \{\omega \in \Omega \,|\, a < X(\omega) \leqslant b\}$ *etc*

PROPOSITION

Soit X une VAR définie sur Ω.
Alors pour tout intervalle réel I, $[X \in I] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in I\}$ est un événement.

preuve :

2 Fonction de répartition

DÉFINITION

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, et soit X une VAR définie sur Ω.
La **fonction de répartition** de X est l'application F_X définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F_X(x) = \mathbf{P}\big(X \leqslant x\big)$$

PROPRIÉTÉ

Soit F_X la fonction de répartition d'une VAR X. Alors :

* F_X est croissante sur $\mathbf{R}$.
* $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

preuves :

3 Indépendance

DÉFINITION

Soient X et Y deux VAR définies sur le même univers Ω.
On dit que X et Y sont des VAR **indépendantes** si et seulement si pour tous intervalles réels I et J, les événements $[X \in I]$ et $[Y \in J]$ sont indépendants :

$$\forall I, J \text{ intervalles réels, } \mathbf{P}\big([X \in I] \cap [Y \in J]\big) = \mathbf{P}(X \in I) \times \mathbf{P}(Y \in J)$$

Généralisations :

• Des VAR $X_1, \ldots, X_n$ définies sur un même univers Ω sont indépendantes si pour tous intervalles réels $I_1, \ldots, I_n$: $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k \in I_k]\right) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_k \in I_k)$

• Une suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^\star}$ de VAR définies sur le même univers Ω est une suite de VAR indépendantes si pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, les VAR $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

Exemple : on jette une infinité de fois un dé bien équilibré, et au $n^{\text{ème}}$ lancer, on note X_n le résultat du dé. Alors la suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^\star}$ est une suite de VAR indépendantes.