# I Réduction des matrices carrées

## 1 Éléments propres d'une matrice carrée

DÉFINITION

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.
$\lambda$ est **valeur propre** de $A$ si et seulement si il existe une matrice-colonne non nulle $X$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ telle que $AX = \lambda X$. Si $\lambda$ est valeur propre de $A$ :

* Une matrice-colonne $X \neq 0_n$ telle que $AX = \lambda X$ est un **vecteur propre** de $A$ associé à $\lambda$.
* $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \mid AX = \lambda X\}$ est le **sous-espace propre** de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$.
* L'ensemble des valeurs propres de $A$ est appelé le **spectre** de $A$ et noté $\mathrm{Sp}(A)$ :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbf{K} \mid \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \mid X \neq 0_n \text{ et } AX = \lambda X\}.$$

*Remarque :* $AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X = 0_n$ où $I_n$ désigne la matrice-identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$,
et $0_n$ désigne la matrice-colonne nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

PROPOSITION

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
En conséquence, $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \dim\big(E_\lambda(A)\big) \geqslant 1$.

PROPOSITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ . Alors :
$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_n$ n'est pas inversible $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$.

*Cas particulier :* $A$ n'est pas inversible si, et seulement si 0 est valeur propre de $A$.

**Exercice 1 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les éléments propres de $A$.

PROPRIÉTÉ

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire (ou diagonale) sont ses coefficients diagonaux.

## 2 Matrice diagonalisable

PROPRIÉTÉ ** LIBERTÉ DES VECTEURS PROPRES **

* Deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont libres :
  si $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(A)$ avec $\lambda \neq \mu$, si $X \in E_\lambda(A)$, $Y \in E_\mu(A)$ et $X, Y \neq 0_n$, alors :
  $$\forall a, b \in \mathbf{K},\ (aX + bY = 0_n) \Rightarrow (a = b = 0).$$
* Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
* Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

PROPOSITION

Une matrice carrée d'ordre $n$ admet au plus $n$ valeurs propres disctinctes et la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est inférieure ou égale à $n$.

DÉFINITION

Une matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite **diagonalisable** si, et seulement s'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ constituée de vecteurs propres de $A$.

PROPOSITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors $A$ est diagonalisable si, et seulement s'il existe une matrice carrée inversible $P$ et une matrice diagonale $D$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AP = PD$.
Dans ce cas, on a $A = PDP^{-1}$ et $D = P^{-1}AP$.

DÉFINITION

Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont dites **semblables** si et seulement si il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que : $B = P^{-1}AP$.

PROPOSITION

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable si et seulement si $A$ est semblable à une matrice diagonale.

## 3 Théorèmes de diagonalisation

Théorème ** Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation **

Une matrice carrée d'ordre $n$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à $n$.

Théorème ** Condition suffisante de diagonalisation **

Une matrice carrée d'ordre $n$ qui admet $n$ valeurs propres distinctes est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

**Exercice 2 :** Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $B$ est-elle diagonalisable ?

**Exercice 3 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. $A$ est-elle diagonalisable ?

**Exercice 4 :** *(Co-diagonalisation)* Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$ telles que $AB = BA$ (*A et B commutent*).
On suppose que $A$ admet $n$ valeurs propres distinctes.
Montrer que tout vecteur propre de $A$ est aussi vecteur propre de $B$.
En déduire que : $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont diagonales.

Théorème ** **Théorème spectral** (version 1) **

Toute matrice symétrique <u>réelle</u> est diagonalisable et n'a que des valeurs propres réelles.
Autrement dit, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^T = A$ alors $A$ est semblable à une matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$.

*preuve : résultat admis*

*Contre-exemple* si $A$ est symétrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Étude de $A = \begin{pmatrix} 1-2i & 2 \\ 2 & 1+2i \end{pmatrix}$.

## 4 Méthode pratique de diagonalisation

### a Méthode générale

1. Déterminer le spectre de $A$.
   Pour cela, écrire que $\lambda$ est valeur propre de $A$ si, et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
   Utiliser la méthode du pivot de Gauss pour échelonner la matrice $A - \lambda I_n$ puis trouver les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$, ce qui donne $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$.
2. $\forall k \in [\![1, p]\!]$, chercher une base $\mathcal{B}_k$ du sous-espace propre $E_{\lambda_k}(A)$ associé à la valeur propre $\lambda_k$.
   La juxtaposition, $\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^{p} \mathcal{B}_k$ de ces bases est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
   Si $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = n$, alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $A$ est diagonalisable.
   Sinon, $A$ n'est pas diagonalisable.
3. Si $A$ est diagonalisable, écrire la matrice $P$ obtenue en juxtaposant les matrice-colonnes de $\mathcal{B}$ :
   $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible, et $D = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs propres de $A$ dans l'ordre correspondant aux vecteurs de $\mathcal{B}$.

**Exercice 5 :** Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

### b Cas particulier de la dimension 2

Une matrice carrée d'ordre 2 est inversible si, et seulement si son déterminant est non nul.
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$.
Les valeurs propres de $A$ sont donc les racines du trinôme $(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$.

**Exercice 6 :** Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. $A$ est-elle diagonalisable ?

### c Quatre astuces pour le calcul des valeurs propres d'une matrice

(1) Matrices carrées de taille 3

Lorsqu'on échelonne $A-\lambda I_n$, après un premier pivot on obtient une matrice du type : $\begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & f(\lambda) & g(\lambda) \\ 0 & h(\lambda) & k(\lambda) \end{pmatrix}$

Si $a \neq 0$, alors : $\text{rg}(A-\lambda I_n) = 1 + \text{rg}\begin{pmatrix} f(\lambda) & g(\lambda) \\ h(\lambda) & k(\lambda) \end{pmatrix}$

et il suffit de calculer le déterminant $f(\lambda) \times k(\lambda) - g(\lambda) \times h(\lambda)$ pour conclure.

**Exercice 7 :** Étudier la diagonalisabilité de $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(2) Matrices stochastiques

Si la somme des coefficients sur chaque ligne d'une matrice $A$ est constante égale à $s$, alors $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $A$ associé à $s$.

En admettant que $A$ et $A^T$ ont mêmes valeurs propres, si la somme des colonnes de $A$ est constante égale à $s$, alors on peut dire que $s$ est valeur propre de $A$, mais on n'a pas de vecteur propre associé.

**Exercice 8 :** Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$. $A$ est-elle diagonalisable ?

(3) Utilisation d'un polynôme annulateur *(Hors programme mais méthode à connaître).*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $P \in \mathbf{K}[X]$ un *polynôme annulateur* de $A$ : $P(A) = 0_{n,n}$.

Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $X \in E_\lambda(A)$, alors par récurrence immédiate : $\forall k \in \mathbf{N},\ (A^k)X = \lambda^k X$.

Donc $P(A) = 0_{n,n}$ implique $P(\lambda) = 0$ : $\lambda$ est racine de $P$.

En résumé : les valeurs propres de $A$ sont à chercher parmi les racines de $P$.
En particulier, si $A$ est nilpotente alors 0 est l'unique valeur propre de $A$.

**Exercice 9 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Exprimer $A$ en fonction de $I_3$ et de la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Après avoir calculé $U^2$, montrer que : $A^2 - 7A + 10I_3 = 0$. En déduire que : $\text{Sp}(A) \subset \{2, 5\}$.

(4) Contrôle du résultat grâce à la trace *(Hors programme)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On appelle **trace** de $A$ le scalaire : $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}$.
C'est la somme des coefficients diagonaux de $A$.
La trace vérifie la propriété suivante : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}),\ \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
Ainsi, si $A$ est diagonalisable et semblable à la matrice diagonale $D$, on a :

$$\text{tr}(D) = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(AP^{-1}P) = \text{tr}(AI_n) = \text{tr}(A)$$

La trace de $A$ est donc égale à la somme des valeurs propres de $A$, en tenant compte de la dimension de leurs espace-propres associés.

*Exemple :* $\text{tr}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3+3+3 = 9$ et $2+2+5 = 9$ (tenir compte du fait que $\dim(E_2) = 2$).

# II Applications de la diagonalisation

## 1 Puissances d'une matrice

Il existe plusieurs méthodes pour calculer les puissances successives d'une matrice carrée.
L'une d'elles consiste à utiliser une matrice semblable diagonale :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $D = \text{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ une matrice diagonale semblable à $A$.
Soit $P$ une matrice carrée inversible telle que $A = PDP^{-1}$.
Alors : $\forall k \in \mathbf{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P\,\text{Diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k)P^{-1}$.

**Exercice 10 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $A^k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

## 2 Applications aux suites

a. Suites récurrentes croisées

On considère des suites définies par leurs premiers termes et une relation de dépendance linéaire entre les termes de rang $n+1$ et les termes de rang $n$.

On note $X_n$ la matrice-colonne des termes de rang $n$. Alors il existe une matrice carrée $A$ telle que : $\forall n \in \mathbf{N},\ X_{n+1} = AX_n$. On montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N},\ X_n = A^n X_0$.

Il suffit donc de connaître $A^n$ pour exprimer les termes généraux des suites en fonction de $n$ et de leurs premiers termes (noter la similarité avec la formule des suites géométriques, mais **attention** à ne pas écrire $X_0 A^n$ qui n'a aucun sens !).

**Exercice 11 :** Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 1 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 4v_n \\ v_{n+1} = -2u_n + v_n \end{cases}$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A$ telle que $\forall n \in \mathbf{N},\ X_{n+1} = AX_n$.

En déduire des expressions de $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$.

b. Suites récurrentes linéaires

On considère une suite $(u_n)$ définie par ses $p$ premiers termes et une relation de récurrence linéaire entre $p+1$ termes consécutifs.

On pose $U_n$ la matrice colonne de $p$ termes consécutifs $u_n, u_{n+1}, \cdots, u_{n+p-1}$ de la suite.

On explicite une matrice carrée $A$ d'ordre $p$ telle que $U_{n+1} = AU_n$.

On en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n = A^n U_0$.

On détermine $A^n$, par exemple en la diagonalisant.

Enfin, on calcule $U_n = A^n U_0$ pour exprimer $u_n$ en fonction de $n$ et des $p$ premiers termes.

**Exercice 12 :** Soit $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$

Déterminer le terme général $u_n$ en fonction de $n$.

## 3 Équations matricielles

Soit $(E)$ une équation d'inconnue une matrice $M$ et qui dépend d'une matrice $A$.

Si $A$ est diagonalisable alors on montre que $M$ et $A$ sont co-diagonalisables.

Puis, si $A$ est semblable à une matrice diagonale $D$, alors on déduit de $(E)$ une équation équivalente $(E')$ qui dépend de $D$. On résout l'équation $(E')$ et on déduit les solutions de $(E)$ de celles de $(E')$.

**Exercice 13 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ l'équation $M^2 = A$.

## 4 Systèmes différentiels

On cherche $n$ fonctions $x_1, \cdots, x_n$ dérivables sur $\mathbf{R}$ solutions d'un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre qui peut s'écrire sous la forme :

$\forall t \in \mathbf{R},\ X'(t) = AX(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$ et $A$ est une matrice carrée d'ordre $n$.

Si $A$ est diagonalisable alors il existe une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $D = \text{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ telle que $D = P^{-1}AP$.

On peut alors écrire que : $X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t)$.

On pose : $\forall t \in \mathbf{R},\ Y(t) = P^{-1}X(t)$.

Par linéarité de la dérivation, $\forall t \in \mathbf{R},\ Y'(t) = P^{-1}X'(t)$ et donc $Y'(t) = DY(t)$.

Comme $D$ est diagonale, les $n$ équations de ce système sont toutes des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre et à coefficients constants, de la forme $y' = ay$.

On résout ces équations pour obtenir la matrice $Y(t)$.

Pour conclure, on calcule $X(t) = PY(t)$.

On remarque qu'il est inutile de calculer $P^{-1}$.

**Exercice 14 :** Résoudre dans $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})^3$ le système différentiel $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + 3z(t) \end{cases}$.