Exercice 1

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

On rappelle que si $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $A^\top$ désigne la matrice transposée de A. Elle est de même format que A, et son coefficient général $a'_{i,j}$ est par définition $a'_{i,j} = a_{j,i}$.

Dans l'espace vectoriel $E_n = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on considère les ensembles :

$$\mathscr{S}_n = \left\{A \in E_n \quad A^\top = A\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_n = \left\{A \in E_n \quad A^\top = -A\right\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E_n.

Désormais, on fixe $n = 2$.

2. a) Établir que $\mathscr{A}_2 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad a \in \mathbf{R}\right\}$.

b) En déduire une base $\mathscr{B}_A$ de $\mathscr{A}_2$, et préciser la dimension de $\mathscr{A}_2$.

3. Donner une base $\mathscr{B}_S$ de $\mathscr{S}_2$, et préciser la dimension de $\mathscr{S}_2$.

4. Vérifier que la juxtaposition des bases $\mathscr{B}_S$ et $\mathscr{B}_A$ forme une base de E_2.

5. En déduire que toute matrice M de E_2 s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice S de $\mathscr{S}_2$ et d'une matrice A de $\mathscr{A}_2$.

Exercice 2

Soit $d \geq 2$ un entier fixé. On considère $\mathbf{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus d. On notera $\mathscr{B}_C$ la base canonique de $\mathbf{R}_d[X]$.

— On définit le sous-ensemble Z de $\mathbf{R}_d[X]$ par : $Z = \{P \in \mathbf{R}_d[X] \quad P(0) = 0\}$.

— On introduit la famille de polynômes $\mathscr{B}_d = (P_0, P_1, \dots, P_d)$ définie par :

$$\forall i \in \{0, \dots, d\} \quad P_i = \prod_{j=0}^{i-1}(X-j) = X(X-1)\dots(X-i+1).$$

Ainsi : $P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X(X-1)$, *etc.*

— Enfin, on définit le sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}_d[X]$ par : $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ où $\mathscr{F}$ est la famille de vecteurs donnée par $\mathscr{F} = (P_1, P_2, \dots, P_d)$.

1. Expliciter les objets ainsi définis dans le cas particulier $d = 4$.

2. Montrer que la famille $\mathscr{B}_d$ est une base de $\mathbf{R}_d[X]$.

3. a) Montrer que Z est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_d[X]$.

b) Montrer que Z est de dimension au plus d.

c) Montrer que $F \subset Z$.

d) En déduire que $F = Z$.

e) Montrer que $\mathscr{F}$ est une base de Z et donner sa dimension.

4. a) Justifier que $\mathscr{C}_d = \left(X, X^2, \dots, X^d\right)$ est une base de Z.

b) Déduire de **2.e)** que pour tout entier $j \in \{1 \dots d\}$, qu'il existe un unique d—uplet de scalaires $(\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{d,j}) \in \mathbf{R}^d$ tel que :

$$X^j = \alpha_{1,j} P_1 + \cdots + \alpha_{d,j} P_d.$$

On ne demande pas de calculer ces scalaires.

5. Prouver que pour $0 \leq k < d$, $P_{k+1} = XP_k - kP_k$.

6. Dans cette question, *largement indépendante des précédentes*, on fixe $d = 4$.

a) Calculer la matrice de passage A de la base $\mathscr{C}_4$ à la base $\mathscr{F}$. *On pourra utiliser le résultat de* **5**.

b) Calculer la matrice A^{-1}. *On fera apparaître les calculs sur la copie.*

c) Donner les coordonnées du vecteur X^4 sur la base $\mathscr{F}$.

7. Application.

a) Justifier que pour tout entier $d \geq 2$, il existe d scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ tels que

$$\forall n \geq d \quad \frac{n^d}{n!} = \lambda_1 \frac{1}{(n-1)!} + \cdots + \lambda_d \frac{1}{(n-d)!}.$$

b) Expliciter les réels λ_j dans le cas particulier $d = 4$.