Exercice 1

1. On montre que $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E_n. Faisons-le pour $\mathscr{S}_n$, c'est exactement la même chose pour $\mathscr{A}_n$. La matrice nulle est dans E_n car elle est égale à sa transposée. Si maintenant λ est un réel, et A et B deux éléments de E_n, par propriétés de la transposition : $(A+\lambda B)^\top = A^\top + \lambda B^\top = A+\lambda B$, car A et B sont dans $\mathscr{S}_n$. Ainsi, $\mathscr{S}_n$ est un espace vectoriel, tout comme $\mathscr{A}_n$.

2. **a)** Posons, pour toute matrice M de E_2, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, a,b,c,d étant quatre réels. On constate, par unicité des coefficients d'une matrice, que l'égalité $M = -M^\top$ donne :
$$\mathscr{A}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \quad a \in \mathbf{R} \right\}.$$
b) Ainsi, on trouve que $\mathscr{A}_2 = \operatorname{Vect}(Z)$ où $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $Z \neq 0$, il constitue une famille libre, mais aussi génératrice de $\mathscr{A}_2$, donc $\mathscr{B}_A = (Z)$ est une base de $\mathscr{A}_2$ et $\dim \mathscr{A}_2 = 1$.

3. Comme précédemment, on constate, par unicité des coefficients d'une matrice, que l'égalité $M = M^\top$ donne :
$$\mathscr{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \quad (a,b,d) \in \mathbf{R}^3 \right\},$$
c'est-à-dire, en posant $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que $\mathscr{S}_2 = \operatorname{Vect}(J,K,L)$. Ceci montre que $\mathscr{B}_S = (J,K,L)$ est une famille génératrice de $\mathscr{S}_2$. Montrons qu'elle est libre. Si a,b,d sont trois scalaires tels que $aJ + bK + dL = 0$, cela donne $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = 0$, et par unicité des coefficients : $a=b=d=0$. Ainsi, $\mathscr{B}_S$ est une base de $\mathscr{S}_2$ et $\dim \mathscr{S}_2 = 3$.

4. La juxtaposition de ces bases donne une famille de 4 vecteurs de E_2. Comme $\dim E_2 = 4$, il suffit de prouver que cette famille est libre pour prouver que c'est une base de E_2. Si une combinaison linéaire de J,K,L,Z est nulle pour quatre scalaires a,b,c,d, mettons :
$$aZ = bJ + cK + dL,$$
alors la matrice aZ est dans $\mathscr{S}_2$. Comme $aZ = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, elle ne peut être égale à sa transposée que si $a = 0$. Ce qui donne ensuite que $bJ + cK + dL = 0$, d'où $b=c=d=0$ puisque $\mathscr{B}_S$ est une famille libre.

5. L'existence a été prouvée précédemment. Si, avec des notations évidentes, on a deux décompositions d'une même matrice en $A+S = A'+S'$, cela donne alors $A - A' = S' - S$. Avec le même argument qu'à la question précédente, $A - A' = 0$ puisque $A - A'$ est dans $\mathscr{A}_2$, mais aussi dans $\mathscr{S}_2$ (car égale à $S' - S$.) D'où $S = S'$.

Exercice 2

1. Pour vérifier qu'on a bien compris les objets définis dans l'énoncé :
   — $Z = \{P \in \mathbf{R}_4[X] \quad P(0) = 0\}$,
   — $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X(X-1)$, $P_3 = X(X-1)(X-2)$, $P_4 = X(X-1)(X-2)(X-3)$,
   — $\mathscr{B}_4 = \Big(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)(X-3)\Big)$,
   — $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}\Big(X, X(X-1), X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)(X-3)\Big)$.
2. P_0 est de degré 0, et de façon générale, il est visible que pour $k \geq 1$, P_k est de degré k comme produit de k facteurs de degré 1. La famille $\mathscr{B}_d$ est donc libre en tant que famille de $d+1$ polynômes non nuls à degrés deux à deux distincts. Comme $\mathbf{R}_d[X]$ est de dimension $d+1$, $\mathscr{B}_d$ en est bien une base.
3. **a)** Le polynôme nul est bien dans Z car il s'annule en 0. Ensuite, si P et Q sont deux polynômes de Z, et λ un réel, comme P et Q s'annulent en 0,le polynôme $R = P + \lambda Q$ s'annule aussi en 0. En effet : $R(0) = P(0) + \lambda Q(0)$. Finalement $R \in Z$. Ainsi, Z est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_d[X]$.

   b) Comme $Z \subset \mathbf{R}_d[X]$, on a $\dim(Z) \leq d+1$. Comme la dimension est un entier, il suffit de prouver que $\dim(Z) \neq d+1$, c'est-à-dire, par propriétés de la dimension, que $Z \neq \mathbf{R}_d[X]$, ce qui est le cas puisque par exemple, le polynôme P_0 n'est pas dans Z.

   c) On commence par montrer que les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont dans Z. Ceci est clair, car pour tout entier $k \geq 1$, P_k se factorise par X, donc admet 0 comme racine. Ensuite, Comme Z est un espace-vectoriel contenant les vecteurs de $\mathscr{F}$, il en contient aussi toutes leurs combinaisons linéaires : c'est la définition de $F \subset Z$.

   d) Comme toute sous-famille d'une famille libre est libre, et que $\mathscr{B}_d$ est libre d'après **2**, le rang de $\mathscr{F}$ est d, donc $\dim F = d$. Par inclusion **3.c**, en passant aux dimensions : $d \leq \dim Z$. Or par **3.b)**, $d \geq \dim Z$. Donc $\dim Z = d$. Avec l'inclusion de **3.c** et l'égalité des dimensions, on a bien $F = Z$.

   e) Comme $\mathscr{F}$ est libre en tant que sous famille de $\mathscr{B}_d$, et possède $\dim Z$ vecteurs, c'est une base de Z.
4. **a)** Les polynômes de la famille $\mathscr{C}_d$ se factorisent tous par X, ils admettent donc tous 0 pour racine. Ainsi $\mathscr{C}_d$ est une famille de vecteurs de Z. En tant que sous-famille de la base canonique de $\mathbf{R}_d[X]$, elle est libre. Finalement, en tant que famille libre de d vecteurs de Z qui est de dimension d, $\mathscr{C}_d$ est une base de Z.

   b) C'est la simple traduction dans le langage de l'algèbre linéaire que X^j est dans Z et que $\mathscr{F}$ en est une base.
5. Il suffit de remarquer que si $0 \leq k < d$, $(X-k)P_k = P_{k+1}$. Il ne reste plus qu'à développer pour conclure.
6. **a)** Par définition la matrice A s'obtient en rangeant en colonne j les coordonnées de P_j sur la base $\mathscr{C}_4$. On calcule avec le résultat de **5** :
   — $P_1 = X = \mathbf{1} \cdot X$,
   — $P_2 = X^2 - X = -\mathbf{1} \cdot X + \mathbf{1} \cdot X^2$,

— $P_3 = XP_2 - 2P_2 = X^3 - X^2 - 2X^2 + 2X = \mathbf{2} \cdot X - \mathbf{3} \cdot X^2 + \mathbf{1} \cdot X^3$,
— $P_4 = XP_3 - 3P_3 = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 3X^3 + 9X^2 - 6X = -\mathbf{6} \cdot X + \mathbf{11} \cdot X^2 - \mathbf{6} \cdot X^3 + \mathbf{1} \cdot X^4$

Finalement
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Pour calculer A^{-1}, on remonte le système d'inconnues x, y, z, t de forme réduite $(A|Y)$ qui est déjà échelonné, et où $Y^\mathsf{T} = (a, b, c, d)$ est un second membre quelconque.

Les équations donnent par remontée dans l'ordre :
— $t = d$,
— puis $z = c + 6t = c + 6d$,
— ensuite, $y = b + 3z - 11t = b + 3c + 18d - 11d = b + 3c + 7d$,
— et enfin $x = a + y - 2z + 6t = a + b + 3c + 7d - 2c - 12d + 6d = a + b + c + d$.

Comme $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \iff A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, on obtient : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Par définition de la matrice de passage, les coordonnées de X^4 sur la base $\mathscr{B}_4$ sont données par la dernière colonne de A^{-1} : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_d}\left(X^4\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. a) Soit $d \geq 2$. D'après le résultat de **4.b)**, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ tels que :
$$X^d = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_d P_d.$$

Ces scalaires sont, bien entendu, les coordonées de X^d sur la base $\mathscr{B}_d$. Cette égalité de fonctions donne en particulier que pour ces scalaires λ_i :
$$\forall n \geq 0 \quad n^d = \lambda_1 P_1(n) + \cdots + \lambda_d P_d(n).$$

D'où par division par $n!$:
$$\forall n \geq 0 \quad \frac{n^d}{n!} = \lambda_1 \frac{P_1(n)}{n!} + \cdots + \lambda_d \frac{P_d(n)}{n!}.$$

Or, pour $1 \leq k \leq d \leq n$, on a : $\dfrac{P_k(n)}{n!} = \dfrac{n(n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{n!} = \dfrac{1}{(n-k)!}$.
En réinjectant cette égalité dans la relation précédente qui devient valable seulement à partir de $n = d$ pour pouvoir simplifier les quotients par des quantités non nullles, on a bien :
$$\forall n \geq d \quad \frac{n^d}{n!} = \lambda_1 \frac{1}{(n-1)!} + \cdots + \lambda_d \frac{1}{(n-d)!}.$$

b) On conclut avec **6.c)** que :

$$\forall n \geq 4 \quad \frac{n^4}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + 7\frac{1}{(n-2)!} + 6\frac{1}{(n-3)!} + \frac{1}{(n-4)!}.$$