Exercices supplémentaires

Exercice 1 : Dans $\mathbf{R}^4$
On définit dans $\mathbf{R}^4$ les vecteurs : $a=(1,2,3,4)$, $b=(1,1,1,3)$, $c=(2,1,1,3)$, $d=(-1,0,-1,2)$ et $e=(2,3,0,1)$. On pose $U=\text{Vect}(a,b,c)$, $V=\text{Vect}(d,e)$.

Étudier les dimensions de U, de V, puis de $U\cap V$.

Exercice 2 : Étude de rang
Soit $t\in\mathbf{R}$. On définit dans $\mathbf{R}^3$ les vecteurs : $u=(t,1,1)$, $v=(1,t,2t)$ et $w=(t,0,1)$.

Pour quelle(s) valeur(s) de t la famille (u,v,w) forme-t-elle une base de $\mathbf{R}^3$?

Exercice 3 : Équations cartésiennes ou paramétriques
Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs $u(1,2,0)$ et $v(3,0,1)$. On pose $F=\text{Vect}(u,v)$.

1. Écrire un système d'équations paramétriques de F.
2. Déterminer une équation cartésienne de F.
3. Déterminer l'intersection de F et de la droite vectorielle engendrée par $w=(1,1,1)$.

Exercice 4 : s-ev de $\mathbf{R}^4$
Soient $F=\{(t,2t,-t,t)\in\mathbf{R}^4,\ t\in\mathbf{R}\}$ et $G=\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4\,|\,x+y+5z+2t=0\}$.

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$. Préciser leurs dimensions.
2. Montrer que F est inclus dans G.
3. Déterminer une base de G contenant le vecteur $u=(1,2,-1,1)$.

Exercice 5 : Familles libres dans $\mathbf{R}^n$
Soient n,p deux entiers naturels non nuls. Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille libre de $\mathbf{R}^n$.

1. Quelle relation simple peut-on écrire entre n et p ?
2. Montrer que la famille $(u_1,u_1+u_2,u_1+u_2+u_3,\dots,u_1+\ldots+u_p)$ est libre dans $\mathbf{R}^n$.
3. La famille $(u_1+u_2,u_2+u_3,\dots,u_{p-1}+u_p,u_p+u_1)$ est-elle libre dans $\mathbf{R}^n$?

Exercice 6 : Famille libre de fonctions
On pose $E=\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
1) Soient a,b deux réels distincts. On définit les applications $f_a,f_b\in E$ par : $\forall x\in\mathbf{R},\ f_a(x)=e^{ax}$ et $f_b(x)=e^{bx}$. La famille (f_a,f_b) est-elle libre dans E ?

Généraliser dans le cas de p réels $a_1,\dots,a_p$ distincts deux-à-deux.
2) Soient $a_1,\dots,a_p$ des réels distincts deux-à-deux. On pose : $\forall i\in[\![1,p]\!],\ \forall x\in\mathbf{R},\ g_i(x)=|x-a_i|$.
La famille $(g_1,\dots,g_p)$ est-elle libre dans E ?

Exercice 7 : s-ev de fonctions
On note $E=\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
On rappelle que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, de vecteur nul la fonction nulle 0_E.
On note : $F=\{f\in E\,|\,f(0)=f(1)=0\}$ et $G=\{f\in E\,|\,\exists a,b\in\mathbf{R}\,|\,\forall x\in\mathbf{R},\ f(x)=ax+b\}$.
On remarquera que G est "simplement" l'ensemble des fonctions affines.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que : $F\cap G=\{0_E\}$.
3. Soit $h\in E$ une fonction quelconque. Montrer qu'il existe $a,b\in\mathbf{R}$ tels que la fonction f définie par son expression $f(x)=h(x)-(ax+b)$ vérifie : $f\in F$.
4. En déduire que pour toute fonction $h\in E$, il existe un unique couple de fonctions $(f,g)\in F\times G$ tel que : $h=f+g$.

Exercice 8 : décomposition paire/impaire
Soit $E=\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
On note P l'ensemble des fonctions paires de E, et I l'ensemble des fonctions impaires de E.

1. Montrer que P et I sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montre que : $P\cap I=\{0_E\}$.
3. Soit $f\in E$. Montrer que $x\mapsto\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est paire, et que $x\mapsto\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ est impaire.
4. En déduire que toute fonction $f\in E$ s'écrit de façon unique $f=g+h$ avec g paire et h impaire.

Problème 1 dans $\mathbf{R}^4$ (*DS5, 2018-2019, 1B*)

Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$u = (1,0,1,0) \quad \text{et} \quad v = (2,0,1,1).$$

On pose $E = \text{Vect}(u,v)$ et $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4,\ x+y-z-t=0\}$.

1. a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$. En déterminer une base ainsi que la dimension.
   b) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$. En déterminer une base ainsi que la dimension.
   c) Montrer que : $E \subset F$. A-t-on $E = F$?
   d) Déterminer un système d'équations cartésiennes de E.
   e) Écrire en langage *Python* une fonction `appartient_E` prenant pour argument un quadruplet `u = (x,y,z,t)` et renvoyant `True` si le vecteur (x,y,z,t) appartient à E, et `False` sinon.

2. On pose $G = \{(a+b, 2a, b, a) \in \mathbf{R}^4,\ (a,b) \in \mathbf{R}^2\}$.
   a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$. En déterminer une base ainsi que la dimension.
   b) Montrer que : $\text{Vect}(u) \subset E \cap F \cap G \subset E$.
   c) En déduire les valeurs possibles de : $\dim(E \cap F \cap G)$.
   d) Montrer que : $v \notin E \cap F \cap G$.
   e) En déduire que : $E \cap F \cap G = \text{Vect}(u)$.

3. Soit m un réel, et v_m le vecteur de $\mathbf{R}^4$ défini par : $v_m = (1+m\ ,\ 0\ ,\ 1-m\ ,\ 3-2m)$.
   a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que v_m appartienne à E.
   b) Donner dans ce cas les coordonnées de v_m selon la base de E trouvée à la question **1a)**.

Problème 2 dans $\mathbf{R}^3$ (*DM6, 2019-2020, 1B*)

Soit a un réel. Dans l'espace-vectoriel $\mathbf{R}^3$, on définit les vecteurs : $u_a = (a,1,1)$ et $v = (1,-2,-2)$.
On pose $E_a = \text{Vect}(u_a, v)$.

1. Déterminer suivant la valeur de a la dimension de E_a.

On pose $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ y-z=0\}$.

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
   Déterminer une base de E, et préciser sa dimension.
3. Montrer que $E = E_1$.

On pose $F = \{(a+b-c, a-b+5c, 2a+b+c) \in \mathbf{R}^3,\ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3\}$.

4. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
5. Déterminer une base de F et préciser sa dimension.
6. Déterminer une équation cartésienne de F.
7. Montrer que $E \cap F$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

On considère la famille $\mathcal{B} = (u_1, v, f)$ avec f le vecteur $f = (1,1,2)$.
On remarquera que $u_1, v \in E$ et que $f \in F$.

8. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
9. Donner la matrice P de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, puis déterminer son inverse.
10. Soit $w = (x,y,z)$ un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^3$.
    Déduire de la question précédente les coordonnées de w dans la base $\mathcal{B}$.

Problème 3 dans $\mathbf{R}^4$ (*DM6, 2020-2021, 1B*)

Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$u_1 = (1,0,0,1), \quad u_2 = (0,0,1,1), \quad u_3 = (0,1,0,-1) \quad \text{et} \quad u_4 = (1,-1,-1,1).$$

et les ensembles : $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ et $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4, \ x = y\}$.

1. a. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle une base de $\mathbf{R}^4$?
   b. Déterminer une base de E ainsi que sa dimension comme sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
   c. Déterminer une équation cartésienne caractérisant l'ensemble E.
   d. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
   e. Déterminer une base de F ainsi que sa dimension.

On pose dans $\mathbf{R}^4$: $v_1 = (1,1,0,0)$ et $v_2 = u_2$.

2. a. Montrer que $E \cap F$ est un sous-espace vectoriel de base (v_1, v_2).
   b. Compléter (v_1, v_2) en une base (v_1, v_2, v_3) de E, de sorte que v_3 ait ses première et troisième coordonnées nulles.
   c. Compléter (v_1, v_2) en une base (v_1, v_2, v_4) de F, de sorte que seule la troisième coordonnée de v_4 soit non nulle.
3. a. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbf{R}^4$.
   b. Écrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.
   c. Rappeler pourquoi P est inversible, et calculer P^{-1}.

On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^4$:

$$w_1 = (1,2,3,4) \quad \text{et} \quad w_2 = (2,0,-3,1)$$

On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(w_1, w_2)$ et $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w_1, w_2)$

4. a. Donner la matrice M.
   b. Quelle est la relation entre les matrices M, N et P ?
   c. En déduire la matrice N.

Problème 4 dans $\mathbf{R}^4$ (*DS6, 2021-2022, 1B*)

Dans $\mathbf{R}^4$, on considère l'ensemble $F = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4, \ x + 3y + 2z - t = 0\big\}$.

1. a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
   b. Donner une base $\mathcal{B}$ de F, et préciser la dimension de F.
   c. Un vecteur $u = (x,y,z,t)$ de $\mathbf{R}^4$ étant représenté par la liste $L = [x,y,z,t]$, écrire une fonction *Python* d'argument L renvoyant `True` si $u \in F$, et `False` sinon.
2. On note $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$. Soit $\mathcal{B}' = \{e_1\} \cup \mathcal{B}$.
   Soit P la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base canonique $\mathcal{C}$.
   a. Déterminer la matrice P.
   b. Déterminer le rang de P.
   c. Que peut-on en déduire pour la matrice P, et pour la famille $\mathcal{B}'$?
3. Soient g_1, g_2, g_3 les vecteurs de $\mathbf{R}^4$ définis par :
   $g_1 = (1,-1,0,1), \quad g_2 = (0,1,2,1), \quad g_3 = (-2,3,2,-1).$
   On note $G = \mathrm{Vect}(g_1, g_2, g_3)$.
   a. Déterminer une base de G, et préciser sa dimension.
   b. Déterminer un système d'équations cartésiennes de G.
   On rappelle qu'une équation cartésienne porte uniquement sur les coordonnées x, y, z, t.
4. Soit $H = F \cap G$.
   a. Que peut-on dire de H ?
   b. Quelles sont les dimensions possibles pour H ?
   c. Déterminer un vecteur non nul h tel que : $h \in H$.
   d. Montrer que : $H = \mathrm{Vect}(h)$.

Problème 5 : s-ev de matrices carrées ***(DS4, 2015-2016, 2A/2B/2C)***

On rappelle que l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients réels, noté $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, est un espace vectoriel. On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

Soient a, b, c trois réels. On pose : $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et on considère l'ensemble :

$$E = \left\{M(a,b,c),\ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3\right\}.$$

1. Déterminer trois matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que pour tous réels a, b, c, $M(a,b,c)$ est une combinaison linéaire des matrices A, B et C.
2. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. En donner une base $\mathcal{B}$, et préciser sa dimension.
3. Montrer que pour toutes matrices $M, M' \in E$, le produit MM' est encore dans E.
   On dira alors que : " E est stable par produit matriciel ".
4. Soit $N = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
   a. Justifier que $N \in E$ et donner les coordonnées de N dans la base $\mathcal{B}$.
   b. Calculer N^2 et préciser les coordonnées de A^2 dans la base $\mathcal{B}$.
   c. Montrer que $\mathcal{B}' = (I_3, N, N^2)$ est une base de E.
   d. Déterminer les coordonnées de N^3 dans la base $\mathcal{B}$.
   e. Calculer N^3.
   f. Exprimer N^3 en fonction de I_3 et de N.
   g. En déduire les coordonnées de N^3 dans la base $\mathcal{B}'$.

Problème 6 : s-ev de suites récurrentes

NB : d'après le BO, "L'étude d'espaces de suites n'est pas un attendu du programme."

On considère le polynôme $Q = X^3 + X^2 - 5X + 3$.

1. Donner une racine évidente de Q. Étudier sa multiplicité.
2. En déduire la factorisation complète de Q dans $\mathbf{R}[X]$.

On note E l'ensemble des suites réelles. On rappelle que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel,
et que le vecteur nul de E est la suite nulle $(0, 0, 0, \ldots)$ notée 0_E.
Soit S l'ensemble des suites $(u_n)_n$ de E telles que : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+3} = -u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n$.

3. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de E.
4. Soient α, β, γ trois réels fixés.
   Montrer qu'il existe une et une seule suite $(u_n)_n \in E$ telle que : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_1 = \beta \\ u_2 = \gamma \end{cases}$
5. Soient $a = (a_n)_n$, $b = (b_n)_n$ et $c = (c_n)_n$ les suites de E telles que :
   $$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = 1 \\ b_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$
   a. Montrer que la famille (a, b, c) est libre.
   b. Montrer que toute suite $(u_n)_n \in E$ est une combinaison linéaire de a, b et c.
   Indication : on pourra considérer des réels α, β, γ tels que $u_n = \alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n$ pour $n \in \{0, 1, 2\}$ et montrer par récurrence triple que : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n$.
   c. En déduire une base $\mathcal{B}$ de E, ainsi que la dimension de E.
6. On considère les trois suites réelles $u = (u_n)_n$, $v = (v_n)_n$ et $w = (w_n)_n$ définies par :
   $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = 1,\ v_n = n$ et $w_n = (-3)^n$.
   a. Montrer que $u, v, w \in E$.
   b. Donner la matrice P de la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ relativement à la base $\mathcal{B}$.
   c. Déterminer le rang de P. Qu'en déduire pour la famille $\mathcal{B}'$?
   d. Déterminer les coordonnées des suites a, b et c dans la base $\mathcal{B}'$.