Programme de colles
Semaine 12 du 15/12 au 19/12/2025

Cette semaine, l'accent sera mis sur le chapitre 'Probabilités'. Les éventuels exercices de diagonalisation resteront de difficulté très modeste.

En semaine 13, les examinateurs pourront proposer des exercices de diagonalisation plus techniques.

Probabilités

- Expérience aléatoire, univers Ω, événements, événement certain, événement impossible.
- Notion de tribu $\mathcal{T}$ sur Ω (aucune question sur les tribus ne doit être posée).
- Événements incompatibles, système complet d'événements.
- Définition d'une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
- Propriétés d'une probabilité :
  $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$, $A \subset B \implies \mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$
- Pour des événements $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 2 à 2 incompatibles, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbf{P}(A_n)$ converge et $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$
- Probabilité conditionnelle sachant A, notation $\mathbf{P}_A(B)$ ou $\mathbf{P}(B \mid A)$. $\mathbf{P}_A$ est une probabilité.
- Formule des probabilités composées (conditionnements successifs).
- Système quasi-complet d'événements.
- Formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un système quasi-complet d'événements, alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(A_n \cap B)$ est convergente et $\mathbf{P}(B) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n \cap B)$.

  Si de plus pour tout n, $\mathbf{P}(A_n) \neq 0$, alors $\mathbf{P}(B) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}_{A_n}(B)$.
- Formule de Bayes.
- Indépendance de 2 événements, indépendance mutuelle de n événements, d'une suite d'événements.

Diagonalisation des matrices

- Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres, spectre d'une matrice carrée
- Les valeurs propres d'une matrice diagonale ou triangulaire sont ses éléments diagonaux.
- Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres disctinctes est libre.
- Une famille obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- Une matrice carrée d'ordre n admet au plus n valeurs propres distinctes et la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n.
- Matrices semblables. Matrice diagonalisable : elle est semblable à une matrice diagonale.
- Cas des matrices triangulaires ou diagonales.
- Une matrice carrée d'ordre n est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.
- Une matrice carrée d'ordre n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.
- Une matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable, et n'a que des valeurs propres réelles.
- Application au calcul des puissances d'une matrice.
- Application à l'étude de suites imbriquées, de suites récurrentes linéaires.
- Application à la résolution de systèmes différentiels linéaires.
- Application à la résolution d'équations matricielles.

Questions de cours :

1. Définition d'une probabilité sur un univers Ω.
2. Définition d'une probabilité conditionnelle.
3. Définition de l'indépendance mutuelle de n événements.
4. Formule des probabilités composées.
5. Formule des probabilités totales.
6. Formule de Bayes.
7. Définition d'une valeur propre ainsi que d'un sous-espace propre pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
8. Que peut-on dire d'une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ?
9. Que peut-on dire de la juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes ?
10. Définition d'une matrice diagonalisable.
11. Condition sur les dimensions des sous-espaces propres pour qu'une matrice $n \times n$ soit diagonalisable.
12. Condition suffisante de diagonalisabilité d'une matrice $n \times n$ quant au nombre de ses valeurs propres.
13. Donner une condition d'inversibilité d'une matrice à l'aide de ses valeurs propres.
14. Donner deux conditions suffisantes (non nécessaires) de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle.