Une équation différentielle d'ordre 2 "dégénérée"

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 (EDL_2) :

$$(E) \quad \ddot{z} + \alpha \dot{z} = \beta$$

d'inconnue une fonction z deux fois dérivable, dont on note les dérivées temporelles première et seconde respectivement $\dot{z}$ et $\ddot{z}$, et où α et β désignent des constantes.

Méthode simple de résolution :

On effectue le changement de fonction $\varphi = \dot{z}$, donc $\dot{\varphi} = \ddot{z}$.
L'équation (E) devient alors : $\dot{\varphi} + \alpha\varphi = \beta$, et on reconnaît une EDL_1 qu'on peut résoudre rapidement.
(H) : $\dot{\varphi} + \alpha\varphi = 0$ donne $\varphi_H(t) = \lambda e^{-\alpha t}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$).
Une solution particulière de (H) est la fonction constante $\varphi_p = \dfrac{\beta}{\alpha}$ (on suppose α non nul).
Le théorème de structure pour les EDL donne : $\varphi = \varphi_H + \varphi_p$ donc $\varphi(t) = \lambda e^{-\alpha t} + \dfrac{\beta}{\alpha}$.
Il reste à intégrer φ pour trouver : $z(t) = -\dfrac{\lambda}{\alpha} e^{-\alpha t} + \dfrac{\beta}{\alpha} t + C$ où C est une constante d'intégration.
Conclusion : en renommant les constantes on peut écrire : $\boxed{z(t) = Ae^{-\alpha t} + \dfrac{\beta}{\alpha} t + C, \ (A, C) \in \mathbf{R}^2.}$

On trouve les valeurs de A et C en utilisant une condition initiale $\begin{cases} z(0) = z_0 \\ \dot{z}(0) = z'_0 \end{cases}$

Résolution à l'aide du théorème sur les EDL_2 :

L'EDLH associée à (E) est $\ddot{z} + \alpha\dot{z} = 0$ d'équation caractéristique $r^2 + \alpha r = 0$.
$r^2 + \alpha r = 0 \Leftrightarrow r(r + \alpha) = 0 \Leftrightarrow r = 0$ ou $r = -\alpha$ donc il existe des constantes réelles λ, μ telles que :
$\forall t \in \mathbf{R}, \ z_H(t) = \lambda e^{-\alpha t} + \mu e^{0t} = \lambda e^{-\alpha t} + \mu$.
Une solution particulière de (E) est une fonction affine : $z_p(t) = at + b$.
En injectant dans (E) on a : $0 + \alpha a = \beta$ donc $a = \dfrac{\beta}{\alpha}$ et $z_p(t) = \dfrac{\beta}{\alpha} t + b$.
Le théorème de structure donne : $z = z_H + z_p$ donc

$$\begin{aligned} z(t) &= \lambda e^{-\alpha t} + \mu + \frac{\beta}{\alpha} t + b \\ &= \lambda e^{-\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} t + \mu + b \end{aligned}$$

$\boxed{z(t) = Ae^{-\alpha t} + \dfrac{\beta}{\alpha} t + C}$ en renommant les constantes.

Remarque : une EDL_2 "dégénérée" est en fait une EDL_1 déguisée, de même que $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ est en fait une équation du second degré déguisée.