I Définitions et notations

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ désigne un univers probabilisé.

1 Variable aléatoire réelle discrète

DÉFINITION

Une **variable aléatoire réelle discrète (VARD)** est une VAR $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$
dont l'ensemble des valeurs $X(\Omega) = \{X(\omega),\, \omega \in \Omega\}$ (univers-image, ou support) est :

- ou bien *fini* de cardinal $n \in \mathbf{N}^\star$: $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
- ou bien *infini dénombrable* : $X(\Omega) = \{x_i\ ,\ i \in \mathbf{N}\}$.

Exemple 1 : On pioche une carte dans un jeu de 32 cartes. On gagne 4 points si on pioche un *As*, 1 point si on pioche une figure, et aucun point sinon. Alors le gain G est une VARD, d'univers-image $G(\Omega) = \{0, 1, 4\}$. C'est un ensemble fini de cardinal 3.

Exemple 2 : On jette une pièce bien équilibrée jusqu'à obtenir 'Pile'. On note X le rang du lancer où on obtient 'Pile', et on pose $X = 0$ si on n'obtient jamais 'Pile'.
Alors X est une VARD d'univers-image $X(\Omega) = \mathbf{N}$ infini dénombrable. .

Exercice 1 : Décrire en français l'événement $[G > 0]$, puis les événements $[X = 3]$ et $[X \leqslant 5]$.

2 Système complet d'événements lié à une VARD

PROPOSITION

Soit X une VARD d'univers-image $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$, avec $I \subset \mathbf{N}$ fini ou infini.
Alors $\big([X = x_i]\big)_{i \in I}$ est un système complet d'événements.

Exercice 2 : X est la VARD de l'exemple 2. On jette X fois un dé bien équilibré et on considère l'événement A : "on obtient au moins une fois un As". Calculer la probabilité de A.

3 Fonction d'une VARD

PROPOSITION

- Soit X une VARD définie sur Ω, et soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$.
  Alors $f \circ X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ est encore une VARD, notée : $f(X)$.
- Soient $X_1, \dots, X_n$ des VARD définies sur Ω, soit $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$.
  Alors $f \circ \big(X_1, \dots, X_n\big) : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ est encore une VARD.

Exemple : G est la VARD de l'exemple 1. Alors G^2 est une VARD d'univers-image $G^2(\Omega) = \{0, 1, 16\}$.
Au cours de la même expérience, si on définit la VARD Y par $Y = 2$ si on pioche un *trèfle*, $Y = 1$ si on pioche un *pique* et $Y = 0$ sinon, alors $Z = G^2 - 2GY + 3Y$ est encore une VARD.
On pourra vérifier que $Z(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 6, 11, 16\}$.

II Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

1 Définition

DÉFINITION

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une VARD. La **loi de probabilité de** X est l'application :

$$\mathbf{P}_X : \begin{cases} X(\Omega) \to [0,1] \\ x \mapsto \mathbf{P}(X = x) \end{cases}$$

Déterminer la loi de la VARD X consiste à :

1. Déterminer l'univers-image $X(\Omega)$ de X ;
2. Pour tout $x \in X(\Omega)$, déterminer la probabilité : $\mathbf{P}(X = x)$.

Exemples :

• Avec la VARD de l'exemple 1, on a vu que $G(\Omega) = \{0, 1, 4\}$.

$\mathbf{P}(G = 4) = \mathbf{P}(\text{"piocher un As"}) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ par équiprobabilité des tirages, et de même :

$\mathbf{P}(G = 1) = \dfrac{12}{32} = \dfrac{3}{8}$ et $\mathbf{P}(G = 0) = \dfrac{16}{32} = \dfrac{1}{2}$.

On peut ici donner la loi de G sous forme d'un tableau :

x_i	0	1	4
$\mathbf{P}(G = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

• Avec la VARD de l'exemple 2, $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$ l'événement $[X = k]$ est : "obtenir 'Face' aux $(k-1)$ premiers lancers puis 'Pile' au $k^{\text{ème}}$ lancer ".
Avec la notation du chapitre précédent, on a : $[X = k] = \omega_{k-1}$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on note F_n l'événement "on obtient 'Face' au $n^{\text{ème}}$ lancer ".
On a donc : $[X = k] = \left(\bigcap_{n=1}^{k-1} F_n \right) \cap \overline{F_k}$ ce qui donne avec la formule des probabilités composées :

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(F_1) \times \mathbf{P}_{F_1}(F_2) \times \ldots \times \mathbf{P}_{F_1 \cap \ldots \cap F_{k-1}}\left(\overline{F_k}\right)$$

Par indépendance des lancers successifs, et puisque la pièce est bien équilibrée :

$\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)$ soit : $\boxed{\forall k \geqslant 1,\ \mathbf{P}(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k.}$

Enfin, $[X = 0] = \omega_\infty$ et $\mathbf{P}(X = 0) = 0$.

2 Propriétés

Propriété

Soit X une VARD d'univers-image $X(\Omega)$.

* si $X(\Omega)$ est fini, $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X = x_k) = 1$.
* si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, alors $X(\Omega) = \{x_k\ ,\ k \in \mathbf{N}\}$.

  Dans ce cas, la série $\sum \mathbf{P}(X = x_k)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_k) = 1$.

Exemples précédents :

1. $\mathbf{P}(G = 0) + \mathbf{P}(G = 1) + \mathbf{P}(G = 4) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$.
2. La série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ pour $k \geqslant 1$ converge et : $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$

en reconnaissant une série géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ $(|q| < 1)$

Remarque : l'événement "on n'obtient jamais 'Pile' " est quasi-impossible.

Propriété

Soit X une VARD, et soit A une partie de $\mathbf{R}$. Alors : $\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{x \in A \cap X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x)$

Exemples : Avec la VARD de l'exemple 1 : $\mathbf{P}\big(G \in [-2, 2]\big) = \mathbf{P}(G = 0) + \mathbf{P}(G = 1) = \frac{7}{8}$.
Avec celle de l'exemple 2 :

$\mathbf{P}\big(1 \leqslant X \leqslant n\big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (somme géométrique de raison $q \neq 1$)

3 Existence d'une VARD

Théorème ** Théorème d'existence d'une VARD **

• Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels distincts et $p_1, \ldots, p_n$ des réels **positifs**.
Alors il existe une VARD X telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbf{P}(X = x_k) = p_k$ si, et seulement si, $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

• Soient $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ des réels distincts et $(p_k)_{k \in \mathbf{N}}$ des réels **positifs**.
Alors il existe une VARD X telle que $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in \mathbf{N}\}$ et $\forall k \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(X = x_k) = p_k$ si, et seulement si, $\sum_{k \in \mathbf{N}} p_k$ est convergente, et $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.

Exemple : Soit $\lambda > 0$. On sait que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda$. On pose : $\forall k \in \mathbf{N},\ p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Alors $p_k \geqslant 0$, $\sum_{k \geqslant 0} p_k$ converge et a pour somme 1. Il existe donc une VARD X donc la loi est :
$X(\Omega) = \mathbf{N}$ et $\forall k \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(X = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

4 Fonction de répartition

DÉFINITION

Soit X une VAR définie sur un univers Ω.
On appelle **fonction de répartition** de X l'application $F_X : \mathbf{R} \to [0,1]$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$$

Exemple : pour la VARD de l'exemple 2 : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(1 \leqslant X \leqslant n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$[X < 1]$ est quasi-impossible, donc : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(X \leqslant n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Enfin, X ne prend que des valeurs entières, donc pour tout réel x, $\mathbf{P}(X \leqslant x) = \mathbf{P}\big(X \leqslant \lfloor x \rfloor\big)$

La fonction de répartition de X a donc pour expression : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor x \rfloor} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

PROPRIÉTÉ

Soit F_X la fonction de répartition d'une VAR X. Alors :

* $\forall x_0 \in \mathbf{R}$, $\mathbf{P}(X = x_0) = \mathbf{P}(X \leqslant x_0) - \mathbf{P}(X < x_0) = F_X(x_0) - \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} F_X(x)$
* F_X est **discontinue** en un réel x_0 si et seulement si $\mathbf{P}(X = x_0) \neq 0$.

Remarques : • en particulier, F_X est continue en tout $x_0 \notin X(\Omega)$.
• la loi de probabilité de X est entièrement déterminée par sa fonction de répartition F_X.

Exercice 3 : Soit X une VARD dont la fonction de répartition F_X est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - e^{-n} & \text{si } n \leqslant x < n+1 \text{ pour un entier } n \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement F_X sur l'intervalle $[0,4]$.
2. Déterminer la loi de X.

DÉFINITION

Deux VARD X, Y définies sur le même univers Ω ont **la même loi** lorsque :

* $X(\Omega) = Y(\Omega)$;
* $\forall x \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(Y = x)$.

Remarque : X et Y ne sont pas forcément égales. Par exemple, on jette une pièce bien équilibrée, et on définit $X = 1$ si on obtient 'Pile' et 0 sinon, et $Y = 1 - X$. Alors X et Y ont même loi, mais $X \neq Y$.

THÉORÈME ** Loi d'une VARD entière **

Soit X une VARD ne prenant que des valeurs entières : $X(\Omega) \subset \mathbf{Z}$. Alors on a :

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \ \mathbf{P}(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1).$$
$$= \mathbf{P}(X \geqslant k) - \mathbf{P}(X \geqslant k+1).$$

Exercice 4 : On lance n fois un dé bien équilibré ($n \in \mathbf{N}^\star$), et on note M_n et m_n respectivement le maximum et le minimum obtenu.

1. Déterminer les univers-image de M_n et m_n.
2. Pour tout $k \in [\![1,6]\!]$, montrer que : $\mathbf{P}(M_n \leqslant k) = \left(\frac{k}{6}\right)^n$.
3. En déduire la loi de M_n.
4. Déterminer la loi de m_n.

III Variables aléatoires discrètes usuelles

1 Loi certaine : lorsqu'il n'y a aucun hasard

DÉFINITION

On dit qu'une variable aléatoire X définie sur un univers Ω suit la **loi certaine de valeur** a lorsque $X(\Omega)$ est un singleton : $\exists a \in \mathbf{R}, \quad X(\Omega) = \{a\}$

En conséquence, $\mathbf{P}(X = a) = 1$ et pour tout $b \neq a$, $\mathbf{P}(X = b) = 0$.

2 Loi uniforme : loi d'équiprobabilité

DÉFINITION

Soit $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ un sous-ensemble fini de $\mathbf{R}$, de cardinal $n \in \mathbf{N}^\star$.
On dit qu'une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi uniforme sur** A lorsque :

- $X(\Omega) = A$
- $\forall x \in A,\ \mathbf{P}(X = x) = \dfrac{1}{n}$.

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(A)$

Remarque : Il s'agit de la loi d'**équiprobabilité** sur A. Elle traduit l'expression **"au hasard"**.
Si $A = [\![1, n]\!]$, la loi de X est alors donnée par :

x_k	1	2	$\cdots$	n
$\mathbf{P}(X = x_k)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

Exemple : le résultat d'un lancer de dé supposé équilibré suit la loi $\mathcal{U}([\![1, 6]\!])$.

3 Loi de Bernoulli : expérience à deux issues

DÉFINITION

Soit $p \in]0, 1[$. Une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p lorsque :

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$
- $\begin{cases} \mathbf{P}(X = 1) = p \\ \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p \end{cases}$

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

Cette loi modélise le succès $(X = 1)$ ou l'échec $(X = 0)$ à une expérience aléatoire donnée.
p est la probabilité du succès. Exemple : $X = 1$ si on obtient 'Pile' en lançant une pièce, et $X = 0$ sinon.
p sera ici la probabilité de faire 'Pile' ($p = 1/2$ si la pièce n'est pas truquée).

4 Loi binomiale : loi des tirages avec remise

DÉFINITION

Soient $n \in \mathbf{N}^\star$ et $p \in]0, 1[$.
Une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi binomiale de paramètres** n **et** p lorsque :

- $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
- $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbf{P}(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

X compte le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli, indépendantes, et de même paramètre p : si $X_1, \ldots, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors :

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$$

5 Loi géométrique : loi du premier succès

DÉFINITION

Soit $p \in]0, 1[$. Une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi géométrique de paramètre** p lorsque :

- $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$
- $\forall k \in \mathbf{N}^\star,\ \mathbf{P}(X = k) = p \times (1 - p)^{k-1}$

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

X est le rang d'apparition du premier succès lors d'une succession infinie d'épreuves de Bernoulli, indépendantes, et de même paramètre p.

La VARD X de l'exemple 2 suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$: $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

L'événement $[X = 0]$ étant quasi-impossible, on considère que le support de X est $\mathbf{N}^\star$ plutôt que $\mathbf{N}$.

PROPRIÉTÉ

> Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors la fonction de répartition de X vérifie : $\forall n \in \mathbf{N},\ F_X(n) = 1 - (1 - p)^n$.
> On a donc aussi : $\mathbf{P}(X > n) = (1 - p)^n$.

PROPOSITION ** Propriété d'invariance temporelle **

> La loi géométrique est une loi "sans mémoire" :
> si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $\forall n, m \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}_{[X>m]}(X > m + n) = \mathbf{P}(X > n)$.

6 Loi de Poisson : loi des événements rares

DÉFINITION

Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^\star$. Une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi de Poisson de paramètre** λ lorsque :

- $X(\Omega) = \mathbf{N}$
- $\forall k \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Les lois de Poisson sont utilisées pour modéliser le nombre d'occurences par unité de temps d'un phénomène dont on connaît l'occurence moyenne λ. Par exemple, si on sait qu'en moyenne il y a 8 accidents par an à un carrefour donné, alors la VAR comptant le nombre d'accidents pendant une année fixée sera modélisée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 8$.

IV Moments d'une variable aléatoire réelle discrète

1 Moments d'ordre r

DÉFINITION

Soit X une VARD, et soit $r \in \mathbf{N}$.

- Si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ est fini, on appelle **moment d'ordre** r de X le réel :

$$m_r(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^r\, \mathbf{P}(X = x_k).$$

- Si $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in \mathbf{N}\}$ et si la série $\sum_{k\geqslant 0} (x_k)^r\, \mathbf{P}(X = x_k)$ est **absolument convergente**,

alors le moment d'ordre r de X est la somme de cette série : $m_r(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} (x_k)^r\, \mathbf{P}(X = x_k)$.

Exercice 5 : Soit X une VARD de loi : $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$ et $\forall k \geqslant 1,\ \mathbf{P}(X = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

1. Vérifier que cette formule définit bien la loi d'une VAR.
2. Montrer que X n'admet aucun moment d'ordre $r \geqslant 1$.

PROPOSITION

Soit X une VARD admettant un moment d'ordre $r \in \mathbf{N}$.
Soit $s \in \mathbf{N}$ tel que $s \leqslant r$. Alors X admet aussi un moment d'ordre s.

2 Espérance, ou moyenne

DÉFINITION

L'espérance d'une VARD X est, s'il existe, son moment d'ordre 1 :

- Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors $\mathbf{E}(X) = m_1(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{P}(X = x_k)$
- Si $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in \mathbf{N}\}$ et si $\sum_{k\geqslant 0} x_k \mathbf{P}(X = x_k)$ est absolument convergente, alors :

$$\mathbf{E}(X) = m_1(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbf{P}(X = x_k)$$

Remarque : L'espérance est la valeur de X qu'on peut *espérer* obtenir, qu'on obtient **en moyenne**.

Exercice 6 : Soit X une VARD de loi : $X(\Omega) = \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\forall k \geqslant 2,\ \mathbf{P}(X = k) = \dfrac{k-1}{k!}$.

1. Montrer que : $\forall k \geqslant 2,\ \mathbf{P}(X = k) = \dfrac{1}{(k-1)!} - \dfrac{1}{k!}$.
2. En déduire que la formule proposée définit bien la loi d'une VAR X.
3. Montre que X possède une espérance, et calculer cette espérance.

DÉFINITION

Une VAR admettant une espérance nulle est dite **centrée**.

PROPRIÉTÉ ** Linéarité de l'espérance **

Soient X, Y deux VARD définies sur le même univers Ω, admettant une espérance.
Alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance, et :

$$\boxed{\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mu \mathbf{E}(Y)}$$

preuve : Résultat admis.

PROPRIÉTÉ ** Croissance de l'espérance **

Soient X, Y deux VARD définies sur le même univers Ω, admettant une espérance.
On suppose que : $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant Y(\omega)$. Alors : $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$.
En particulier : si $X \geqslant 0$ (*ie* : $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geqslant 0$), alors : $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$.

THÉORÈME ** Théorème de transfert **

Soit X une VARD, et soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. On pose $Y = f(X)$.

• Si $X(\Omega)$ est fini, alors : $\mathbf{E}(Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbf{P}(X = x)$.

• Si $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in \mathbf{N}\}$, alors Y admet une espérance si et seulement si $\sum_{k \geqslant 0} f(x_k)\mathbf{P}(X = x_k)$ converge absolument. Dans ce cas, $\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(x_k)\mathbf{P}(X = x_k)$.

preuve : Résultat admis.

3 Variance, écart-type

DÉFINITION

Soit X une VAR telle que : • X admet une espérance $\mathbf{E}(X)$,
• $X - \mathbf{E}(X)$ admet un moment d'ordre 2.
Alors on appelle **variance** de X et on note $\mathbf{V}(X)$ le réel : $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\big((X - \mathbf{E}(X))^2\big) = m_2(X - \mathbf{E}(X))$.

Remarque : La variance est un *indicateur de dispersion* de la variable aléatoire autour de son espérance.

PROPOSITION ** Formule de KÖNIG HUYGENS **

Soit X une VAR. Alors X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2. On a dans ce cas : $\boxed{\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\big(X^2\big) - \mathbf{E}(X)^2}$

PROPOSITION

Si X admet une variance, alors : $\boxed{\forall a, b \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X)}$

PROPOSITION

Soit X admettant une variance. Alors : $\mathbf{V}(X) \geqslant 0$, et $\mathbf{V}(X) = 0$ si et seulement si X est presque sûrement constante : $\exists a \in \mathbf{R} \,|\, \mathbf{P}(X = a) = 1$.

DÉFINITION

Soit X une VAR admettant une variance.
On appelle **écart-type** de X et on note $\sigma(X)$ le réel : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.
Si $\mathbf{E}(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$, alors on dit que X est **centrée réduite**.

PROPOSITION

Soit X une VAR admettant une variance non nulle. On pose $X^\star = \dfrac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$.
Alors $X^\star$ est centrée réduite. $X^\star$ est la VAR **centrée réduite associée à X.**

V Moments usuels à connaître

1 Loi certaine : Si X suit une loi certaine de valeur a, alors $\mathbf{E}(X) = a$ et $\mathbf{V}(X) = 0$.

2 Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$: Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$, alors $\mathbf{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

3 Loi de Bernoulli : Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbf{E}(X) = p$ et $\mathbf{V}(X) = p(1-p)$.

4 Loi binomiale : Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbf{E}(X) = np$ et $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$.

5 Loi géométrique : Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $\mathbf{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbf{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

6 Loi de Poisson : Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbf{E}(X) = \lambda$ et $\mathbf{V}(X) = \lambda$.

VI Simulations informatiques

On utilise le module `random` pour simuler des VAR : `import random as rd`

1 Loi certaine de valeur a

```
def certaine(a) :
    return a
```

2 Loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$

```
def uniforme(a,b) :
    return rd.randint(a,b)
```

3 Loi uniforme sur $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$

A est modelisé par une liste.

```
def uniforme(A) :
    return rd.choice(A)
```

4 Loi de Bernoulli

```
def Bernoulli(p) :
    return int(rd.random() < p)
```

5 Loi binomiale

```
def binomiale(n,p) :
    S = 0
    for _ in range(n) :
        S += rd.random() < p
    return S
```

```
def binomiale(n,p) :
    return sum( [ rd.random() < p for _ in range(n) ] )
```

6 Loi géométrique

```
def geometrique(p) :
    rang = 1
    while rd.random() > p :
        rang += 1
    return rang
```

7 Loi de Poisson

```
import numpy as np
def poisson(mu) :
    k, p = 0, np.exp(-mu)
    F = p
    r = rd.random()
    while F < r :
        k += 1
        p *= mu / k
        F += p
    return k
```

8 Lois quelconques

Situation 1 : deux listes données représentent la loi de probabilité d'une VAR X :

`V = [x1, ...,xn]` est la liste des valeurs $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$

`P = [p1, ..., pn]` est la liste correspondante des probabilités : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbf{P}(X = x_k) = p_k$.

```
def simuleX(V,P) :
    S, k, r = P[0], 0, rd.random()
    while S < r :
        k += 1
        S += P[k]
    return V[k]
```

Situation 2 : $X(\Omega) = \mathbf{N}$ ou $\mathbf{N}^\star$, et $\mathbf{P}(X = k)$ est donnée par une formule : $\mathbf{P}(X = k) = f(k)$:

```
def simuleX(f) :
    S, k, r = f(0), 0, rd.random()
    while S < r :
        k += 1
        S += f(k)
    return k
```