I Généralisation de la notion d'intégrale sur un segment

1 Intégrale sur un intervalle I

Soit I un intervalle réel, et soit f une fonction **continue** ou **continue par morceaux** sur I.
Si I est un segment ($I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbf{R},\ a \leqslant b$), on sait déjà définir l'intégrale de f entre a et b.
Rappel : si f est continue sur $[a, b]$, alors elle admet une primitive F sur $[a, b]$ et on pose :

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Dans ce chapitre, on généralise cette définition à des intervalles I qui ne sont pas des segments :

$$I = [a, b[,\ ]a, b],\ ]a, b[,\ [a, +\infty[,\ ]a, +\infty[,\ ]-\infty, b],\ ]-\infty, b[,\ ]-\infty, +\infty[.$$

Dans tout ce chapitre, a désigne un réel ou $-\infty$, et b désigne un réel ou $+\infty$.

Définition

> Soit f une fonction continue sur un intervalle réel I.
> Si I n'est pas un segment, alors $\displaystyle\int_I f$ est une intégrale **généralisée** (ou **impropre**).

On peut régler un cas simple :

Définition

> Soit I un intervalle de bornes $a, b \in \mathbf{R}$, et soit f une fonction continue sur I.
> Si I n'est pas un segment, et si f est prolongeable par continuité aux bornes de I en une fonction $\tilde{f}$, alors on pose : $\displaystyle\int_I f = \int_a^b \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t$.
> On dira alors que l'intégrale de f sur I est **faussement généralisée**.

Exercice 1 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 t.\ln(t)\,\mathrm{d}t$

2 Définition

a Intégrale sur $[a, b[$ ou $[a, +\infty[$

Définition

> Soient $I = [a, b[$, f une fonction continue sur I, et F une primitive de f sur I.
> On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I f$ **converge**, ou **existe** si et seulement si F possède une limite finie en b. On définit alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} F(x) - F(a)$.
> Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_I f$ **diverge**.

Exercice 2 : Étudier l'existence (la convergence) et calculer le cas échéant les intégrales :

- $\displaystyle I_1 = \int_{[0,1[} \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$
- $\displaystyle I_2 = \int_{[1,+\infty[} \frac{\mathrm{d}t}{t}$
- $\displaystyle I_3 = \int_{\mathbf{R}^+} e^{-t}\,\mathrm{d}t$

b Intégrale sur $]a, b]$ ou $]-\infty, b]$

Définition

> Soient $I =]a, b]$, f une fonction continue sur I, et F une primitive de f sur I.
> On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I f$ **converge**, ou **existe** si et seulement si F possède une limite finie en a. On définit alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - \lim_{x \to a} F(x)$.
> Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_I f$ **diverge**.

Exercice 3 : Étudier l'existence (la convergence) et calculer le cas échéant les intégrales :

- $\displaystyle I_4 = \int_{]0,1]} \frac{\mathrm{d}t}{t}$
- $\displaystyle I_5 = \int_{]0,1]} \ln(t)\,\mathrm{d}t$
- $\displaystyle I_6 = \int_{]-\infty,-1]} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$

c Intégrale sur $]a,b[$ ou $]-\infty,b[$ ou $]a,+\infty[$ ou $]-\infty,+\infty[$

DÉFINITION

Soient $I=]a,b[$, f une fonction continue sur I, et F une primitive de f sur I.

On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I f$ **converge**, ou **existe** si et seulement si il existe $c\in I$ tel que $\displaystyle\int_{]a,c]} f$ et $\displaystyle\int_{[c,b[} f$ convergent. On pose alors : $\displaystyle\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.

Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_I f$ **diverge**.

Exercice 4 : Étudier l'existence et calculer le cas échéant les intégrales :

$*$ $I_7=\displaystyle\int_{\mathbf{R}_+^\star}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ $*$ $I_8=\displaystyle\int_{\mathbf{R}_+^\star}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ $*$ $I_9=\displaystyle\int_{\mathbf{R}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$

Méthode : si $\displaystyle\int_a^b f$ est impropre en a et en b, on choisit c tel que $a<c<b$ et on étudie séparément la convergence de $\displaystyle\int_a^c f$ et celle de $\displaystyle\int_c^b f$.

d Intégrale d'une fonction continue sur un segment sauf en un nombre fini de points

DÉFINITION

Soit $I=[a,b]$ un segment et f continue sur I sauf en $c_1,\ldots,c_n\in I$.
On suppose $a\leqslant c_1\leqslant\ldots\leqslant c_n\leqslant b$, et on pose $c_0=a$ et $c_{n+1}=b$.

Alors $\displaystyle\int_I f$ **converge** si et seulement si toutes les intégrales $\displaystyle\int_{c_k}^{c_{k+1}} f$ convergent, pour $k\in[\![0,n]\!]$.

On pose alors : $\displaystyle\int_a^b f=\sum_{k=0}^{n}\int_{c_k}^{c_{k+1}} f$. Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_I f$ **diverge**.

Exercice 5 : Étudier l'existence et calculer le cas échéant les intégrales :

$*$ $I_{10}=\displaystyle\int_{[-1,1]}\ln\big(|t|\big)\,\mathrm{d}t$ $*$ $I_{11}=\displaystyle\int_{[0,2]}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|t-1|}}$ $*$ $I_{12}=\displaystyle\int_{[-2\pi,2\pi]}\tan(t)\,\mathrm{d}t$

II Propriétés des intégrales impropres

1 Linéarité

PROPOSITION

Soient f,g continues sur l'intervalle I de bornes a et b.

Soient $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$. Si $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ convergent, alors $\displaystyle\int_I(\lambda f+\mu g)$ converge,

et dans ce cas : $\displaystyle\int_a^b(\lambda f+\mu g)=\lambda\int_a^b f+\mu\int_a^b g$.

2 Relation de Chasles

PROPOSITION

Soit f continue sur l'intervalle I de bornes a et b.

Soit c tel que : $a<c<b$. Alors $\displaystyle\int_I f$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ convergent.

On a dans ce cas : $\displaystyle\int_a^c f+\int_c^b f=\int_a^b f$.

3 Positivité, croissance

PROPOSITION

Soient $a < b$ et f, g continues sur l'intervalle I de bornes a et b.

$*$ si $\displaystyle\int_I f$ converge et si $f \geqslant 0$ sur I, alors : $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$.

$*$ si $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ convergent et si $f \leqslant g$ sur I, alors : $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

$*$ si $\displaystyle\int_I f$ converge, si $f \geqslant 0$ sur I et si $\exists c \in I,\ f(c) > 0$, alors : $\displaystyle\int_a^b f > 0$.

Remarque : ce dernier résultat est appelé *stricte positivité* des intégrales généralisées.

Il s'énonce de façon équivalente : si $\displaystyle\int_I f$ converge et est nulle, si $f \geqslant 0$ sur I, alors f est nulle sur I.

III Théorèmes de convergence

1 Théorème de comparaison

THÉORÈME $**$ **Théorème de comparaison pour les fonctions positives** $**$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $0 \leqslant f \leqslant g$ sur l'intervalle I de bornes $a < b$.

$*$ si $\displaystyle\int_I g$ converge, alors $\displaystyle\int_I f$ converge et on a : $\displaystyle 0 \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

$*$ si $\displaystyle\int_I f$ diverge, alors $\displaystyle\int_I g$ diverge aussi.

Exercice 6 : Étudier l'existence des intégrales :

$*$ $\displaystyle I_{13} = \int_{[1,+\infty[} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$ $\quad$ $*$ $\displaystyle I_{14} = \int_{]0,1]} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ $\quad$ $*$ $\displaystyle I_{15} = \int_{\mathbf{R}_+} (e^t - 2)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

2 Théorème d'équivalence

THÉORÈME $**$ **Théorème d'équivalence pour les fonctions positives** $**$

Soient f et g continues et **positives** sur l'intervalle I de bornes a et b, et soit c tel que $a < c < b$.

$*$ <u>Cas où $b \notin I$</u> : si $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$, alors $\displaystyle\int_c^b f$ et $\displaystyle\int_c^b g$ sont de même nature.

$*$ <u>Cas où $a \notin I$</u> : si $f(t) \underset{t\to a}{\sim} g(t)$, alors $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_a^c g$ sont de même nature.

Exercice 7 : Étudier l'existence des intégrales :

$*$ $\displaystyle I_{16} = \int_{\mathbf{R}_+} \frac{2t-1}{t^3+t+1}\,\mathrm{d}t$ $\quad$ $*$ $\displaystyle I_{17} = \int_{\mathbf{R}_-} \frac{(t+1)e^t}{2t-1}\,\mathrm{d}t$ $\quad$ $*$ $\displaystyle I_{18} = \int_{]0,1[} \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$

3 Intégrales généralisées absolument convergentes

DÉFINITION

Soit I un intervalle de bornes a, b, et f continue sur I.
On dit que $\displaystyle\int_I f$ est **absolument convergente** si $\displaystyle\int_I |f|$ converge.

PROPOSITION

Si $\displaystyle\int_I f$ est absolument convergente, alors elle est convergente, et on a : $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$

Attention : la réciproque de cette proposition est fausse. Il existe des intégrales généralisées convergentes qui ne sont pas absolument convergentes.

Exercice 8 : Étudier l'existence des intégrales :

$*$ $\displaystyle I_{19} = \int_{[1,+\infty[} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ $\quad$ $*$ $\displaystyle I_{20} = \int_{]0,1]} \frac{\sin(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ $\quad$ $*$ $\displaystyle I_{21} = \int_{\mathbf{R}} \frac{\cos^2(t)+\cos(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

IV Techniques de calcul

1 Application de la définition

Si on connaît une primitive F de f sur I, on étudie ses limites aux bornes de I pour savoir si $\int_I f$ converge.

2 Intégration par parties

Théorème ** **Intégration par parties (IPP) pour une intégrale généralisée** **

Soient u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I de bornes a et b. Soit $c \in]a, b[$.

* <u>Cas où $b \notin I$</u> : si uv possède une limite finie en b, et si $\int_c^b uv'$ converge, alors $\int_c^b u'v$ converge

$$\text{et : } \int_c^b u'v = \lim_{x \to b} u(x)v(x) - u(c)v(c) - \int_c^b uv'$$

* <u>Cas où $a \notin I$</u> : si uv possède une limite finie en a, et si $\int_a^c uv'$ converge, alors $\int_a^c u'v$ converge

$$\text{et : } \int_a^c u'v = u(c)v(c) - \lim_{x \to a} u(x)v(x) - \int_a^c uv'$$

Exercice 9 : Étudier l'existence, et calculer le cas échéant les intégrales :

* $I_{22} = \int_{\mathbf{R}_+} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ * $I_n = \int_{[1,+\infty[} \frac{\ln(t)}{t^n}\,\mathrm{d}t \quad (n \in \mathbf{N})$

3 Changement de variables

Théorème ** **Changement de variable pour une intégrale généralisée** **

Soient φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle J de bornes α et β, strictement monotone de J vers $I = \varphi(J)$. On sait que I est un intervalle de bornes a, b avec $a = \lim_\alpha \varphi$ et $b = \lim_\beta \varphi$.
Soit f continue sur I. Alors $\int_I f$ converge si et seulement si $\int_J \varphi' \times f \circ \varphi$ converge.
Dans ce cas, on a : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \varphi'(x) f\big(\varphi(x)\big)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 10 : Calculer * $I_{23} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ * $I_{24} = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

Propriété

Soit $b \in \mathbf{R}_+^\star \cup \{+\infty\}$, et soit $I =]-b, b[$. Soit f une fonction continue sur I.
Si f est paire ou impaire, alors $\int_0^b f$ et $\int_{-b}^0 f$ sont de même nature. En cas de convergence :

* si f est paire, alors $\int_{-b}^b f = 2 \times \int_0^b f$. * si f est impaire, alors $\int_{-b}^b f = 0$.

Exemples : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 2 \times \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 11 : Calculer * $I_{25} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$ * $I_{26} = \int_{-1}^1 \frac{t\sqrt{1-|t|}}{\cos(\frac{\pi t}{2})}\,\mathrm{d}t$

V Intégrales impropres célèbres

1 Intégrale de Gauss

Propriété

L'**intégrale de Gauss** $\int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.

2 Intégrales de Riemann

Propriété *!!!* *Hors-programme* *!!!*

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Une **intégrale de Riemann** est de la forme : $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ ou $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

* $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, et vaut alors $\frac{1}{\alpha - 1}$.
* $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, et vaut alors $\frac{1}{1-\alpha}$.
* $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ diverge pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$.

Exercice 12 : Démontrer ces résultats.