Dans tout ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

I Rappels sur les applications linéaires

1 Définition

Définition

Soient $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$ deux $\mathbf{K}$-ev. On considère $f : E \to F$.
On dit que f est une **application linéaire** de E dans F (ou *morphisme*) lorsque :

- $\forall u, v \in E, \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$
- $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ ou simplement $\mathcal{L}(E,F)$.

Cas particuliers :

- Si $f : E \to F$ est linéaire et bijective, on dit que f est un **isomorphisme**.
- Si $f : E \to E$ est linéaire, on dit que f est un **endomorphisme**.
  Leur ensemble est noté $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ ou simplement $\mathcal{L}(E)$.
- Si $f : E \to E$ est linéaire et bijective, on dit que f est un **automorphisme**.
  Leur ensemble est noté $\mathcal{GL}_{\mathbf{K}}(E)$ ou simplement $\mathcal{GL}(E)$.
- $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,\mathbf{K})$ est appelée une **forme linéaire**. Leur ensemble se note aussi : $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,\mathbf{K}) = E^\star$.

Proposition ** **Caractérisation d'une application linéaire** **

$f : E \longrightarrow F$ est linéaire si et seulement si : $\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbf{K},\ f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors : $*\ f(0_E) = 0_F$.

$*\ \forall \lambda_1, \cdots, \lambda_q \in \mathbf{K},\ \forall u_1, \cdots, u_q \in E,\ \ f\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i f(u_i).$

Par contraposée : si $f(0_E) \neq 0_F$, alors f n'est pas linéaire.

Définition

Soient E, F deux $\mathbf{K}$-ev. S'il existe un isomorphisme $f : E \to F$, alors on dit que E et F sont **isomorphes**.

2 Exemples

- Soit $a \in \mathbf{R}$. La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = ax$ est linéaire : $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$.
- Soit $k \in \mathbf{K}$. L'application $h_k : \begin{cases} E \to E \\ u \mapsto ku \end{cases}$ est appelée **homothétie de** E **de rapport** k.
  h_k est un endomorphisme de E. Si $k \neq 0$, alors h_k est de plus un automorphisme de E : $\big(h_k\big)^{-1} = h_{\frac{1}{k}}$.
- $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y) \mapsto (x+2y, -x, 3y) \end{cases}$ est une application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$.
- $\int : \begin{cases} \mathcal{C}^0\big([a,b]\big) \to \mathbf{R} \\ f \mapsto \displaystyle\int_a^b f \end{cases}$ est linéaire sur $\mathcal{C}^0\big([a,b]\big)$, le $\mathbf{R}$-ev des fonctions continues sur $[a,b]$.
- $d : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \\ f \mapsto f' \end{cases}$ est linéaire : $d \in \mathcal{L}(E)$ où $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$.
- Soit E l'ensemble des suites réelles (u) de série convergente. Alors $s : (u) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est linéaire.
- Soit E l'ensemble des VAR définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ et admettant une espérance.
  Alors l'espérance est une forme linéaire sur E.

3 Applications linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$

$f : \mathbf{K}^p \longrightarrow \mathbf{K}^n$ est linéaire si et seulement si les coordonnées dans $\mathbf{K}^n$ de $f(u)$ sont des combinaisons linéaires des coordonnées dans $\mathbf{K}^p$ de u.

4 Somme d'applications linéaires, produit par une constante

PROPOSITION

$\mathcal{L}(E,F)$ est stable par combinaisons linéaires.
$(\mathcal{L}(E,F),+,\cdot)$ est un $\mathbf{K}$-ev, s-ev de $(\mathcal{F}(E,F),+,\cdot)$.

On retient : Si f et g sont linéaires, si $\lambda,\mu \in \mathbf{K}$, alors $\lambda f+\mu g$ est linéaire.

5 Composition d'applications linéaires

PROPOSITION

- La composée d'applications linéaires est une application linéaire.
- Si f est un isomorphisme, alors f^{-1} est une application linéaire.

COROLLAIRE

- La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme.
- La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

II Noyau et image d'une application linéaire

1 Images directes et réciproques d'un s-ev par une application linéaire

PROPOSITION

Soient E,F, deux $\mathbf{K}$-ev, et $f\in\mathcal{L}(E,F)$.

- Pour tout s-ev E_1 de E, l'ensemble $f(E_1)$ est un s-ev de F.
- Pour tout s-ev F_1 de F, l'ensemble $f^{-1}(F_1)$ est un s-ev de E.

On retient : Les images directes et réciproques de s-ev par une application linéaire sont des s-ev.

2 Noyau et image d'une application linéaire

DÉFINITION

Soient E,F, deux $\mathbf{K}$-ev, et $f\in\mathcal{L}(E,F)$.

- On appelle **noyau** de f, et on note $\mathrm{Ker}(f)$ l'ensemble des vecteurs de E d'image 0_F :
$$\mathrm{Ker}(f)=\{u\in E,\ \ f(u)=0_F\}=f^{-1}\big(\{0_F\}\big)$$
- On appelle **image** de f, et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble des images par f des vecteurs de E :
$$\mathrm{Im}(f)=\{v\in F,\ \ \exists u\in E,\ \ v=f(u)\}=\{f(u),\ u\in E\}=f(E)$$

À retenir : Déterminer le noyau d'une application linéaire f, c'est résoudre l'équation $f(u)=0$.

Exercice 1 : Soit $f:\mathbf{R}[X]\to\mathbf{R}[X]$ définie par : $\forall P\in\mathbf{R}[X],\ f(P)=XP'-2P$.
Montrer que $f\in\mathcal{L}(\mathbf{R}[X])$, et déterminer le noyau et l'image de f.

PROPOSITION

Soient E,F, deux $\mathbf{K}$-ev, et $f\in\mathcal{L}(E,F)$.

- $\mathrm{Ker}\, f$ est un s-ev de E.
- $\mathrm{Im}\, f$ est un s-ev de F.

3 Injectivité et surjectivité des applications linéaires

PROPOSITION

Soient E,F deux $\mathbf{K}$-ev, et $f\in\mathcal{L}(E,F)$.

- f est injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, f=\{0_E\}$.
- f est surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f=F$.

Exercice 2 : soit $f:\begin{cases}\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2\\ (x,y)\mapsto(-x+y,2x-y)\end{cases}$. Étudier l'injectivité et la surjectivité de f.

III Action d'une application linéaire sur une base

1 Slogan

THÉORÈME

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors toute application de $\mathcal{B}$ dans F se prolonge de façon unique en une application linéaire de E dans F.

On retient :

$\boxed{\text{Une application linéaire est entièrement déterminée par son action, par ailleurs arbitraire, sur une base.}}$

Corollaire

Tout $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n est isomorphe à $\mathbf{K}^n$.

Exercice 3 :
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. On considère l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ telle que $f(e_1) = (2, 5, 0)$ et $f(e_2) = (-1, 1, 4)$. Déterminer $f(u)$ pour tout $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$.

2 Rang d'une application linéaire

Propriété

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors :

- f est injective si, et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une famille libre de F.
- f est surjective si, et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F.
- f est bijective si, et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une base de F.

Corollaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie. Alors :
- si f est injective, alors F est de dimension infinie, ou de dimension finie avec $\dim E \leqslant \dim F$.
- si f est surjective, alors F est de dimension finie et $\dim E \geqslant \dim F$.
- si f bijective, alors F est de dimension finie et $\dim E = \dim F$.

Exemples : il n'existe aucune injection ni bijection de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$, mais il existe des surjections.
Il n'existe aucune surjection ni bijection de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^5$, mais il existe des injections.
Il existe une bijection de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ si et seulement si $n = p$.
Si E et F sont isomorphes, alors E et F sont de dimensions infinies, ou E et F sont de dimensions finies et $\dim(E) = \dim(F)$.

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que $\mathrm{Im}(f)$ est un s-ev de F de dimension finie.
Alors on appelle **rang** de f, et on note $\mathrm{rg}(f)$, la dimension du s-ev $\mathrm{Im}(f)$.
Si $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E, alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\,(f(\mathcal{B})) = \dim\,(\mathrm{Im}\, f)$.

Exercice 4 : Soit $f : \begin{cases} \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x - y + z, -x + y - z) \end{cases}$. Déterminer le rang de f.

3 Caractérisation des applications linéaires par leur rang

Théorème ** **Théorème du rang** **

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie.
Alors : $\dim\,(\mathrm{Ker}\, f) + \dim\,(\mathrm{Im}\, f) = \dim E$, ou encore : $\boxed{\dim\,(\mathrm{Ker}\, f) + \mathrm{rg}(f) = \dim E}$.

Exercice 5 : Soit $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y, 2x) \end{cases}$. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et en déduire le rang de f.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E, F de dimensions finies p et n. Alors :
- $\ast$ $\mathrm{rg}(f) \leqslant n$, et f est surjective $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = n$.
- $\ast$ $\mathrm{rg}(f) \leqslant p$, et f est injective $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = p$.
- $\ast$ f est bijective $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = n = p$.

En particulier, si $\dim E = \dim F$ alors : f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective.

Exercice 6 : Montrer que $f : \begin{cases} \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (3x + z, y + 2z, x + y + z) \end{cases}$ est bijective.

Attention : le résultat est faux pour les endomorphismes en dimension infinie.
Contre-exemple : on pose $E = \mathbf{R}[X]$ et on considère $d : P \mapsto P'$.

IV Représentations matricielles

Dans tout ce paragraphe, E, F et G sont des $\mathbf{K}$-ev de dimensions finies.

1 Matrice d'une application linéaire

DÉFINITION

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de F.
On appelle **matrice de l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$** la matrice de la famille $f(\mathcal{B})$ dans la base $\mathcal{B}'$. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e_1), \dots, f(e_p)) \quad \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,p} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \lambda_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \cdots & \lambda_{n,p} \end{pmatrix} \iff \forall j \in [\![1,p]\!], \quad f(e_j) = \lambda_{1,j}.e'_1 + \cdots + \lambda_{n,j}.e'_n$$

Cas particuliers :

- Si f est un endomorphisme de E, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$. C'est une matrice carrée.
- Si f est une forme linéaire, alors la matrice de f est une matrice-ligne.
- Soit E un espace vectoriel de dimension n, et muni d'une base $\mathcal{B}$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$

Exercice 7 : Donner la matrice de $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y) \mapsto (x+y, 2x-y, 3y) \end{cases}$ dans les bases canoniques.

PROPOSITION

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors pour toutes bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E et F, on a : $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\right)$.

2 Image d'un vecteur par une application linéaire

PROPOSITION

Soient E, F deux $\mathbf{K}$-ev de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
On considère $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $u \in E$. Alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$
En notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(u))$, alors : $Y = AX$

Remarque : Cette formule généralise la formule de linéarité en dimension 1 : $y = ax$.

Exercice 8 : Soit $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y) \mapsto (x+y, 2x-y, 3y) \end{cases}$.

1. Rappeler la matrice A de f dans les bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$.
2. On pose $u = (5, -2) \in \mathbf{R}^2$. Déterminer $f(u)$ de deux manières.

3 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

DÉFINITION

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
On appelle **application linéaire canoniquement associée à** A l'application $f_A \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ définie par :

$$f_A : \begin{cases} \mathbf{K}^p \to \mathbf{K}^n \\ (x_1, \dots, x_p) \mapsto (y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

C'est l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbf{K}^p$ et $\mathbf{K}^n$ est A.

Exercice 9 : exprimer l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : Le rang d'une matrice correspond au rang de l'application linéaire qui lui est associée.

4 Opérations sur les matrices

a Somme, produit par un scalaire

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de E et F, soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors :

- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$
- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$

b Composée d'applications linéaires

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$, et $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ des bases de E, F, G.
Alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$

En particulier, si f est un endomorphisme de E et si $k \in \mathbf{N}$, alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)^k$.
où f^k désigne la composée $k^{\text{ième}}$ de f par elle-même.

A retenir : $\boxed{\text{Une composée d'applications linéaires correspond à un produit matriciel.}}$

Exemple : Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. On pose $g = f \circ f \circ f - 2.f \circ f + 3.\mathrm{Id}_E$
Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = A^3 - 2A^2 + 3I_n$, où n désigne la dimension de E.

c Réciproque d'un isomorphisme

Théorème

Soient E, F des $\mathbf{K}$-ev de dimensions finies et de bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. On considère $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors f est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible.
Dans ce cas, $\dim E = \dim F$ et $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\right)^{-1}}$

Exercice 10 : Soit $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (3x-y, -5x+2y) \end{cases}$

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.
2. Expliquer pourquoi A est inversible, et déterminer A^{-1}.
3. Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. En déduire l'expression de $f^{-1}(x,y)$.

Proposition

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$.
Alors A et B sont inversibles, et $A^{-1} = B$.

5 Noyau, image d'une matrice

Définition

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice de taille $n \times p$. On définit :
$\mathrm{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \mid MX = 0\}$ l'ensemble des matrice-colonnes X telles que $MX = 0$.
$\mathrm{Im}(M) = \{MX,\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})\}$ l'ensemble des matrice-colonnes de la forme MX.

Remarque : si $n = p$ et si $\mathrm{Ker}(M) \neq \{0_{n,1}\}$, alors $0 \in \mathrm{Sp}(M)$ et $\mathrm{Ker}(M) = E_0(M)$.
En particulier : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(M) = \{0_{n,1}\}$.
Plus généralement, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, alors $E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n)$.

6 Formules de changement de base

Proposition

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$.

Proposition ** **Changement de bases pour un vecteur** **

Soit E un $\mathbf{K}$-ev de dimension finie n muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
Soit $u \in E$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$. Alors : $\boxed{X = PX'.}$

Théorème ** **Changement de bases pour un endomorphisme** **

Soit E un $\mathbf{K}$-ev de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On note $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors : $\boxed{A' = P^{-1}AP.}$

Remarque : on reconnaît la définition de deux matrices semblables.

$\boxed{\text{Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.}}$

Exercice 11 : Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. On considère $\mathcal{B} = \big((1,1), (-1,2)\big)$.

1. Donner l'expression de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ canoniquement associée à la matrice A.
2. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{R}^2$, écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer P^{-1}.
4. En déduire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}$.

V Réduction des endomorphismes

1 Éléments propres d'un endomorphisme

DÉFINITION

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-ev E (de dimension quelconque).
Un **vecteur propre** de f est un vecteur $u \in E$, non nul, tel que : $f(u) = \lambda u$ pour un certain $\lambda \in \mathbf{K}$.
Une **valeur propre** de f est un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que : $\exists u \in E,\ u \neq 0,\ f(u) = \lambda u$.
Le **spectre** de f est l'ensemble de ses valeurs propres. On le note : $\mathrm{Sp}(f)$.
Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, l'**espace propre** associé à λ est l'ensemble des vecteurs $u \in E$ tels que $f(u) = \lambda u$.

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f),\ E_\lambda(f) = \{u \in E \,|\, f(u) = \lambda u\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda I_E)$$

PROPOSITION

Pour toute valeur propre λ de f, l'espace propre $E_\lambda(f)$ est un s-ev de E, et $\dim(E_\lambda(f)) \geqslant 1$.

Exercice 12 : • Soit d la dérivation de $\mathbf{K}[X]$: $\forall P \in \mathbf{K}[X],\ d(P) = P'$. Déterminer le spectre de d.
• Soit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ la dérivation de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. Déterminer $\mathrm{Sp}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ et étudier les espaces propres.

PROPOSITION

Soient $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs propres de f, associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux-à-deux distinctes. Alors $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre.

COROLLAIRE

Si E est de dimension finie n, et si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors f admet au plus n valeurs propres.
De plus, une juxtaposition de bases des sous espaces propres de f est une famille libre.
En conséquence, $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim\big(E_\lambda(f)\big) \leqslant n$.

2 Diagonalisation d'un endomorphisme

DÉFINITION

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est **diagonalisable** si et seulement si il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.

PROPOSITION

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec <u>E de dimension finie</u>. Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E, et $A = \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f)$.
Alors :
* $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$.
* f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.
* f est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est diagonale.

THÉORÈME ** **Diagonalisabilité d'un endomorphisme** **

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec <u>E de dimension finie n</u>.
• f est diagonalisable si et seulement si : $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim\big(E_\lambda(f)\big) = n$.
• Si f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable, et chaque espace propre est de dimension 1.

Exercice 13 : Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$ et f l'application définie par : $\forall P \in E,\ f(P) = (X^2 - 1)P'' - (3X + 1)P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les éléments propres de f.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?