

I Rappels de géométrie plane ou de l'espace

1 Vecteurs de \mathbf{R}^2 ou de \mathbf{R}^3

Soit $u = (x, y)$ ou $u = (x, y, z)$ un vecteur du plan \mathcal{P} ou de l'espace \mathcal{E} .

La matrice de u relativement à la base canonique de \mathbf{R}^2 ou de \mathbf{R}^3 est donc : $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

DÉFINITION

Deux vecteurs u et v du plan ou de l'espace sont **colinéaires** si et seulement si :
 $\exists \lambda \in \mathbf{R}, u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.

PROPOSITION

u, v colinéaires \Leftrightarrow la famille (u, v) n'est pas libre (elle est liée)
 $\Leftrightarrow \text{rg}(u, v) \leq 1$
 $\Leftrightarrow \det(u, v) = xy' - x'y = 0$ pour des vecteurs du plan
 $\Leftrightarrow xy' - x'y = yz' - y'z = zx' - z'x = 0$ pour des vecteurs de l'espace

Exercice 1 : Soit $a \in \mathbf{R}$. On considère les vecteurs $u = (5a, 3)$ et $v = (10, 3a)$ dans \mathbf{R}^2 .
 Déterminer tous les réels a pour lesquels (u, v) est une base de \mathbf{R}^2 .

DÉFINITION

Le **produit-scalaire** de deux vecteurs u, v du plan ou de l'espace est le réel défini par :
 $\langle u, v \rangle = \langle u | v \rangle = (u | v) = u \cdot v = xx' + yy' \quad \text{ou} \quad xx' + yy' + zz'$
 La **norme** de u est : $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
 Un vecteur de norme 1 est dit **normé**.

Remarque : on note parfois $u^2 = \langle u, u \rangle$ le **carré scalaire** de u .

Exercice 2 : Montrer que : $\forall u, v \in \mathbf{R}^2$ ou \mathbf{R}^3 , $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

PROPOSITION

$\forall u, v \in \mathbf{R}^2$ ou \mathbf{R}^3 , $\langle u, v \rangle = \|u\| \times \|v\| \times \cos(\widehat{u, v})$

DÉFINITION

Deux vecteurs du plan ou de l'espace sont dits **orthogonaux** lorsque leur produit scalaire est nul.
 $u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$
 Une famille de vecteurs du plan ou de l'espace est dite **orthogonale** si les vecteurs de cette famille sont 2 à 2 orthogonaux. Si de plus ils sont normés, alors on dit que la famille est **orthonormale**.

Exemple : les bases canoniques de \mathbf{R}^2 ou de \mathbf{R}^3 sont des bases orthonormales.

2 Droites du plan \mathcal{P}

a) Droite donnée par un point et un vecteur-directeur

Soit \mathcal{D} la droite passant par un point $A(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ et de vecteur-directeur $u = (a, b) \in \mathbf{R}^2$.

Alors $M(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et u sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, u) = 0$
 $\Leftrightarrow b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$: on a trouvé une **équation cartésienne** de \mathcal{D} .

Réciproquement : soit \mathcal{D} une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.
 Alors \mathcal{D} admet pour vecteur-directeur le vecteur $u = (-b, a)$.

De plus : $M(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et u sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda u = (\lambda a, \lambda b)$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbf{R})$: c'est une **représentation paramétrique** de \mathcal{D} .

b) Droite donnée par deux points distincts

Soit \mathcal{D} la droite passant par les points $A(x_0, y_0)$ et $B(x_1, y_1) \in \mathcal{P}$.

On applique la méthode précédente en utilisant le vecteur-directeur $u = \overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$.

c) Droite donnée par un point et un vecteur-normal

Soit \mathcal{D} la droite passant par un point $A(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ et de vecteur-normal $n = (a, b) \in \mathbf{R}^2$.

Alors $M(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et n sont orthogonaux $\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM}, n \rangle = 0$
 $\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$: c'est une équation cartésienne de \mathcal{D} .

Réciproquement : soit \mathcal{D} une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.
 Alors \mathcal{D} admet pour vecteur-normal le vecteur $n = (a, b)$.

Exercice 3 : Soit \mathcal{D} la droite du plan \mathcal{P} d'équation cartésienne : $2x + 3y + 7 = 0$.

On considère le point $A(-1, 2)$, le vecteur $u = (3, 2)$ et la droite Δ passant par A et dirigée par u .

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite \mathcal{D}' passant par A et perpendiculaire à \mathcal{D} .
2. Déterminer l'intersection entre \mathcal{D} et Δ .

3 Cercles du plan \mathcal{P}

a) Cercle donné par son centre et son rayon

Soit \mathcal{C} le cercle de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon $R \in \mathbf{R}_+^*$.

Alors $M(x, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 = R^2$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad \text{ce qui donne l'équation cartésienne du cercle } \mathcal{C}.$$

b) Cercle donné par un diamètre

Soit \mathcal{C} le cercle de diamètre $[AB]$ où $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ sont deux points distincts du plan.

Alors $M(x, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et \overrightarrow{BM} sont orthogonaux

$$\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \rangle = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

c) Représentation paramétrique d'un cercle

Soit \mathcal{C} un cercle d'équation : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x - x_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{R}\right)^2 = 1$.

On pose $\frac{x - x_0}{R} = \cos(\theta)$, on a $\frac{y - y_0}{R} = \sin(\theta)$ et $\mathcal{C} : \begin{cases} x = x_0 + R \cos(\theta) \\ y = y_0 + R \sin(\theta) \end{cases} \quad (\theta \in \mathbf{R})$

d) Éléments caractéristiques d'un cercle

Soit $E = \{M(x, y) \in \mathcal{P}, x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$ où a, b, c sont trois réels donnés.

alors $E : \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = d$ où $d = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$. Si $d < 0$, alors $E = \emptyset$.

Si $d \geq 0$, alors E est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ et de rayon $R = \sqrt{d}$.

Exercice 4 :

1. Déterminer une équation du cercle \mathcal{C} de diamètre $[AB]$, où $A(3, 1)$ et $B(7, -1)$.
Préciser son centre et son rayon.
2. Déterminer l'ensemble $E = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid x^2 + y^2 - 8x - 6y + 10 = 0\}$, puis préciser $\mathcal{C} \cap E$.
3. Soit \mathcal{D} la droite d'équation : $x + 3y - 4 = 0$. Déterminer $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

4 Plans de l'espace \mathcal{E}

a) Plan donné par un point et deux vecteur-directeurs non colinéaires

Soit \mathcal{P} le plan passant par $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$ et dirigé par $u = (a, b, c), v = (a', b', c'), u, v$ non colinéaires.

Alors $M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de u et $v \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda u + \mu v$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$$

On a trouvé un **système d'équations paramétriques** du plan \mathcal{P} .

On peut y lire directement les coordonnées de 2 vecteurs directeurs de \mathcal{P} , et d'un point $A \in \mathcal{P}$.

b) Plan donné par trois points non alignés

Rappel : trois points non alignés A, B, C de l'espace définissent un plan, noté (ABC) .

On trouve des équations paramétriques de (ABC) par la méthode précédente, avec $u = \overrightarrow{AB}$ et $v = \overrightarrow{AC}$.

c) Plan donné par un point et un vecteur-normal

Soit \mathcal{P} le plan passant par un point $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$ et de vecteur-normal $n(a, b, c)$.

Alors $M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et n sont orthogonaux $\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM}, n \rangle = 0$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 : \text{c'est une \textbf{équation cartésienne} de } \mathcal{P}.$$

Réciproquement :

Soit \mathcal{P} un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Alors $n = (a, b, c)$ est un vecteur-normal au plan \mathcal{P} . Tout vecteur non nul et orthogonal à n dirige \mathcal{P} .

5 Droites dans l'espace \mathcal{E}

a) Droite donnée par un point et un vecteur-directeur

Soit \mathcal{D} la droite passant par un point $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$ et de vecteur-directeur $u = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.

Alors : $M(x, y, z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et u sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda u = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}, \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} : \text{c'est une représentation paramétrique de } \mathcal{D}.$$

Si $\mathcal{D} = (AB)$ avec A, B deux points distincts de l'espace, on utilise le vecteur $u = \overrightarrow{AB}$.

b) Intersection de plans dans l'espace

Deux plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 de l'espace sont :

* ou bien parallèles (strictement ou confondus),

* ou bien sécants, et leur intersection est alors une droite.

Soient $\mathcal{P}_1 : ax + by + cz + d = 0$ et $\mathcal{P}_2 : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ deux plans de l'espace.

Alors \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont parallèles si et seulement si ils ont des vecteurs normaux colinéaires :

\mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont parallèles $\Leftrightarrow n_1 = (a, b, c)$ et $n_2 = (a', b', c')$ sont colinéaires

Si \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 ne sont pas parallèles, on pose $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

Alors \mathcal{D} admet un **système d'équations cartésiennes** :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \mathcal{P}_1 \\ M \in \mathcal{P}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Si \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont donnés l'un par une équation cartésienne, et l'autre par une représentation paramétrique :

$$\mathcal{P}_1 : ax + by + cz + d = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 : \begin{cases} x = x_0 + \lambda \alpha + \mu \alpha' \\ y = y_0 + \lambda \beta + \mu \beta' \\ z = z_0 + \lambda \gamma + \mu \gamma' \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$$

Alors $n = (a, b, c)$ est normal à \mathcal{P}_1 , $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $v = (\alpha', \beta', \gamma')$ dirigent \mathcal{P}_2 ,

On exprime μ en fonction de λ grâce à : $a(x_0 + \lambda \alpha + \mu \alpha') + b(y_0 + \lambda \beta + \mu \beta') + c(z_0 + \lambda \gamma + \mu \gamma') + d = 0$

On remplace μ dans la représentation paramétrique de \mathcal{P}_2 pour obtenir un paramétrage de \mathcal{D} .

Exercice 5 :

On considère dans l'espace les points $A(1, 1, 0), B(2, 1, -1)$ et $C(3, 2, 1)$. Soit $n = (1, 1, 2) \in \mathbf{R}^3$.

1. Montrer que les points A, B, C ne sont pas alignés. On pose \mathcal{P}_1 le plan (ABC) .
2. Déterminer une équation cartésienne de \mathcal{P}_1 .
3. Soit \mathcal{P}_2 le plan passant par A et de vecteur-normal n . Montrer que \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants.
4. Soit $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. Déterminer une représentation paramétrique de \mathcal{D} .

II Produit scalaire dans \mathbf{R}^n

1 Définition

DÉFINITION

Soient $u = (x_1, \dots, x_n)$ et $v = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de \mathbf{R}^n .
Alors le **produit-scalaire** de u et v est le réel défini par : $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Écriture matricielle dans la base canonique :

Soient $U = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ et $V = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(v)$, où \mathcal{C} désigne la base canonique de \mathbf{R}^n .

Alors $U^T = (x_1 \dots x_n)$ et $V = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ donc : $\langle u, v \rangle = U^T V$.

DÉFINITION

Soit $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. La **norme euclidienne** de u est le réel : $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.
Un vecteur de norme 1 est dit **normé**, ou **unitaire**.

Exercice 6 : Dans \mathbf{R}^4 , on pose $u = (1, 2, 3, 4)$ et $v = (1, -1, 1, -1)$. Calculer $\langle u, v \rangle$, $\|u\|$ et $\|v\|$.

2 Propriétés

PROPRIÉTÉ

- * le produit scalaire est **bilinéaire** :
 $\forall u_1, u_2, v \in \mathbf{R}^n, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \langle \lambda u_1 + u_2, v \rangle = \lambda \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$
 $\forall u, v_1, v_2 \in \mathbf{R}^n, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \langle u, \lambda v_1 + v_2 \rangle = \lambda \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$
- * le produit scalaire est **symétrique** : $\forall u, v \in \mathbf{R}^n, \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- * le produit scalaire est **positif** : $\forall u \in \mathbf{R}^n, \langle u, u \rangle \geq 0$.
- * le produit scalaire est **défini** : $\forall u \in \mathbf{R}^n, \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

PROPOSITION ** Inégalité de Cauchy-Schwarz **

| $\forall u, v \in \mathbf{R}^n, |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \times \|v\|$ avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

PROPRIÉTÉ

- * $\forall u \in \mathbf{R}^n, \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- * $\forall u \in \mathbf{R}^n, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \|\lambda u\| = |\lambda| \times \|u\|$
- * $\forall u, v \in \mathbf{R}^n, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (**inégalité triangulaire**).
 et $\|u + v\| = \|u\| + \|v\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}_+, u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$ (u, v colinéaires et de même sens).

3 Orthogonalité

DÉFINITION

Deux vecteurs de \mathbf{R}^n sont **orthogonaux** lorsque leur produit scalaire est nul : $u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$.
 Deux matrice-colonnes $M, N \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ sont dites orthogonales ssi $M^T N = 0$.
 Une famille de vecteurs de \mathbf{R}^n est dite **orthogonale** si les vecteurs de cette famille sont 2 à 2 orthogonaux. Si de plus ils sont normés, alors on dit que la famille est **orthonormale**.

Exemple : la base canonique de \mathbf{R}^n est une famille orthonormale.

Méthode : on obtient une famille orthonormale à partir d'une famille orthogonale en multipliant tout vecteur de cette famille par l'inverse de sa norme.

PROPOSITION

| Toute famille orthogonale de \mathbf{R}^n ne contenant pas le vecteur nul est libre.

THÉORÈME ** Théorème de Pythagore **

| Soient u, v orthogonaux dans \mathbf{R}^n . Alors : $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

4 Bases orthonormales

DÉFINITION

Une base de \mathbf{R}^n qui est aussi une famille orthonormale est appelée **base orthonormale** de \mathbf{R}^n .

PROPOSITION ** Caractérisation des bases orthonormales **

Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de \mathbf{R}^n , de cardinal n .
 Alors \mathcal{B} est une base orthonormale de $\mathbf{R}^n \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Remarque : on utilise aussi cette caractérisation pour des bases orthonormales de sous-espaces vectoriels de \mathbf{R}^n , de dimension p . Il faut alors s'assurer que $\text{card}(\mathcal{B}) = p$.

THÉORÈME (admis)

| Tout sous-espace vectoriel non nul de \mathbf{R}^n admet une base orthonormale.

Exercice 7 : Dans \mathbf{R}^4 , on pose $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (0, 1, 0, 1)$, $w = (0, 0, 1, 0)$ et $F = \text{Vect}(u, v, w)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de F .
2. Construire une base orthonormale (a, b, c) de F telle que : $\begin{cases} \text{Vect}(a) = \text{Vect}(u) \\ \text{Vect}(a, b) = \text{Vect}(u, v) \end{cases}$

PROPOSITION

Le produit scalaire et donc la norme se calculent de la même façon dans toutes les bases orthonormales de \mathbf{R}^n : soient $u, v \in \mathbf{R}^n$, soit \mathcal{B} une base orthonormale de \mathbf{R}^n .

On pose $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, $V = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$.

Alors : $\langle u, v \rangle = U^T V = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ où $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

COROLLAIRE

| La matrice de passage entre 2 bases orthonormales de \mathbf{R}^n vérifie : $P^T P = I_n$ (ie : $P^{-1} = P^T$).

THÉORÈME ** **Théorème spectral** (version complète) **

Soit A une matrice symétrique à coefficients réels : $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

1) On suppose que λ, μ sont deux valeurs propres distinctes de A .

Soient $X \in E_\lambda$ et $Y \in E_\mu$. Alors X et Y sont orthogonales : $X^T Y = 0$.

2) A est diagonalisable, et il existe une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ constituée de vecteurs propres.

III Projections orthogonales

1 Orthogonal d'un s-ev de \mathbf{R}^n

DÉFINITION

Soit A une partie de \mathbf{R}^n . On appelle **orthogonal** de A , et on note A^\perp , le sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n constitué des vecteurs qui sont orthogonaux à tout vecteur de A .

$$A^\perp = \{u \in \mathbf{R}^n \mid \forall v \in A, u \perp v\}$$

PROPOSITION

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n . Alors :

$$1. F \cap F^\perp = \{0_{\mathbf{R}^n}\}.$$

$$2. \forall u \in \mathbf{R}^n, \exists ! (u_F, u_{F^\perp}) \in F \times F^\perp \mid u = u_F + u_{F^\perp}$$

Exercice 8 : Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^4 défini par : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid y - t = 0\}$.

Déterminer F^\perp . Soit $u = (1, 1, 0, 0)$. Trouver $v \in F, w \in F^\perp$ tels que : $u = v + w$.

2 Projection orthogonale sur un s-ev de \mathbf{R}^n

DÉFINITION

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n . On appelle **projection orthogonale** sur F l'endomorphisme p_F de \mathbf{R}^n défini par : $\forall u \in \mathbf{R}^n, u = u_F + u_{F^\perp}$ et on pose : $p_F(u) = u_F$.

Exemples : $p_{\mathbf{R}^n} = \text{Id}_{\mathbf{R}^n}$ et $p_{\{0\}} = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)}$

PROPRIÉTÉ

Soit F un sous-espace de \mathbf{R}^n et p_F la projection orthogonale sur F . Alors :

$$1. p_F \circ p_F = p_F$$

$$2. \text{Im}(p_F) = F$$

$$3. \text{Ker}(p_F) = F^\perp$$

COROLLAIRE

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n . Alors : $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$.

PROPRIÉTÉ ** **Expression de la projection orthogonale** **

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n non nul, de base $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_r)$.

$$1. \text{ si } \mathcal{B} \text{ est orthogonale, alors : } \forall u \in \mathbf{R}^n, p_F(u) = \sum_{i=1}^r \frac{\langle u, f_i \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle} f_i$$

$$2. \text{ si } \mathcal{B} \text{ est orthonormale, alors : } \forall u \in \mathbf{R}^n, p_F(u) = \sum_{i=1}^r \langle u, f_i \rangle f_i$$

Exercice 9 : Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^4 défini par : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid y - t = 0\}$.

1. Déterminer le projeté orthogonal de $u = (1, 1, 0, 0)$ sur F .

2. Déterminer la matrice M de la projection orthogonale p_F dans la base canonique de \mathbf{R}^4 .

3 Distances dans \mathbf{R}^n

DÉFINITION

On appelle **distance euclidienne** (ou simplement : distance) entre deux vecteurs de \mathbf{R}^n la norme euclidienne de leur différence : $\forall u, v \in \mathbf{R}^n, d(u, v) = \|u - v\|$

Exercice 10 : Calculer dans \mathbf{R}^4 la distance entre $u = (1, 1, 0, 0)$ et $v = (0, 1, 0, 1)$.

PROPRIÉTÉ

Soient $u, v, w \in \mathbf{R}^n$. Alors :

$$* d(u, v) = d(v, u)$$

$$* d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$$

$$* d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$$

DÉFINITION

Soit $A \subset \mathbf{R}^n$ non vide, et soit $u \in \mathbf{R}^n$. La distance de u à A est : $d(u, A) = \inf \{d(u, a), a \in A\}$.

PROPOSITION

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n , et soit $u \in \mathbf{R}^n$. Alors : $d(u, F) = \|u - p_F(u)\|$.
De plus, si $v \in F$ et si $d(u, v) = d(u, F)$, alors $v = p_F(u)$.

Exercice 11 : Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^4 défini par : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid y - t = 0\}$.
On pose $u = (1, 1, 0, 0)$. Déterminer $d(u, F)$.

4 Application : ajustement affine par la méthode des moindres carrés

On dispose d'un relevé $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ de n points du plan, par exemple issus de données expérimentales.
On cherche une relation affine liant les abscisses x_i aux ordonnées y_i de ces points : $y_i = ax_i + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$).
Si les points $M_i(x_i, y_i)$ ne sont pas tous alignés, on n'obtiendra pas une relation exacte.
On cherche alors la "meilleure" relation affine, au sens où la somme des carrés des distances entre les points M_i et les points de la droite $\Delta : y = ax + b$ de mêmes abscisses est minimale.

On cherche donc à minimiser : $S = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$.

On pose dans \mathbf{R}^n : $u = (x_1, \dots, x_n)$, $v = (1, \dots, 1)$ et $w = (y_1, \dots, y_n)$.

Alors $S = \|w - (au + bv)\|^2$ et $\{au + bv, a, b \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}(u, v) = F$.

u, v ne sont pas colinéaires (car sinon les x_i sont tous égaux et les points M_i sont alignés), donc $\dim(F) = 2$.

La somme S est minimale lorsque $au + bv = p_F(w)$.

On cherche donc une base orthogonale de F , par exemple (v, v_0) avec $v_0 \in F$, non nul, tel que $\langle v_0, v \rangle = 0$.

On pose $v_0 = \alpha u + \beta v$. Alors $\langle v_0, u \rangle = \alpha \langle u, u \rangle + \beta \langle v, u \rangle = \alpha \langle u, u \rangle + n\beta = 0$ donc $\beta = -\frac{\alpha}{n} \langle u, v \rangle$

et en choisissant $\alpha = 1$, on obtient : $v_0 = u - \frac{\langle u, v \rangle}{n} v$. On peut enfin calculer $p_F(w)$ et trouver a et b .

Exercice 12 : appliquer cette méthode aux points $(1, 2)$, $(2, 8)$, $(3, 12)$, $(4, 14)$.

5 Projection dans le plan \mathcal{P}

Soit $M(x_0, y_0)$ un point du plan, et $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ une droite connue par une équation cartésienne.
Le **projeté orthogonal** H de M sur \mathcal{D} est l'intersection de \mathcal{D} avec l'unique droite perpendiculaire à \mathcal{D} et passant par M . La distance entre M et la droite \mathcal{D} est donnée par : $d(M, \mathcal{D}) = MH$.

Soient $u = \overrightarrow{OM}$, $n = (a, b)$ vecteur-normal à \mathcal{D} . Alors : \overrightarrow{MH} est colinéaire à n : $\exists \lambda \in \mathbf{R}, \overrightarrow{MH} = \lambda n$.

Puis $H \in \mathcal{D}$ donne : $a(x_0 + a\lambda) + b(y_0 + b\lambda) + c = 0$ dont on déduit que : $\lambda = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$

On a donc : $MH = |\lambda| \times \|n\| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

6 Projection dans l'espace \mathcal{E}

Soit $M(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace, et $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ un plan connu par une équation cartésienne. Le **projeté orthogonal** H de M sur \mathcal{P} est l'intersection de \mathcal{P} avec l'unique droite perpendiculaire à \mathcal{P} et passant par M . La distance entre M et le plan \mathcal{P} est donnée par : $d(M, \mathcal{P}) = MH$.

Soit $n = (a, b, c)$ un vecteur-normal à \mathcal{P} . On trouve les coordonnées de H en exprimant : $\begin{cases} H \in \mathcal{P} \\ n \text{ et } \overrightarrow{MH} \text{ sont colinéaires} \end{cases}$

$\overrightarrow{MH} = \lambda n$ donc $H \in \mathcal{P} \Leftrightarrow a(x_0 + a\lambda) + b(y_0 + b\lambda) + c(z_0 + c\lambda) + d = 0$ donc $\lambda = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$

Enfin, $d(M, \mathcal{P}) = MH = |\lambda| \times \|n\|$ donc $MH = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Exercice 13 : Déterminer la distance entre le point $M(1, 2, 3)$ et le plan $\mathcal{P} : x + y + z + 3 = 0$.
Préciser les coordonnées du projeté orthogonal de M sur \mathcal{P} .