

## I Rappels de géométrie plane ou de l'espace

### 1 Vecteurs de $\mathbf{R}^2$ ou de $\mathbf{R}^3$

Soit  $u = (x, y)$  ou  $u = (x, y, z)$  un vecteur du plan  $\mathcal{P}$  ou de l'espace  $\mathcal{E}$ .

La matrice de  $u$  relativement à la base canonique de  $\mathbf{R}^2$  ou de  $\mathbf{R}^3$  est donc :  $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ou  $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

DÉFINITION

Deux vecteurs  $u$  et  $v$  du plan ou de l'espace sont **colinéaires** si et seulement si :  
 $\exists \lambda \in \mathbf{R}, u = \lambda v$  ou  $v = \lambda u$ .

PROPOSITION

$$\begin{aligned} u, v \text{ colinéaires} &\Leftrightarrow \text{la famille } (u, v) \text{ n'est pas libre (elle est liée)} \\ &\Leftrightarrow \text{rg}(u, v) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \det(u, v) = xy' - x'y = 0 \quad \text{pour des vecteurs du plan} \\ &\Leftrightarrow xy' - x'y = yz' - y'z = zx' - z'x = 0 \quad \text{pour des vecteurs de l'espace} \end{aligned}$$

**Exercice 1** : Soit  $a \in \mathbf{R}$ . On considère les vecteurs  $u = (5a, 3)$  et  $v = (10, 3a)$  dans  $\mathbf{R}^2$ .

Déterminer tous les réels  $a$  pour lesquels  $(u, v)$  est une base de  $\mathbf{R}^2$ .

DÉFINITION

Le **produit-scalaire** de deux vecteurs  $u, v$  du plan ou de l'espace est le réel défini par :

$$\langle u, v \rangle = \langle u \mid v \rangle = (u \mid v) = u \cdot v = xx' + yy' \quad \text{ou} \quad xx' + yy' + zz'$$

La **norme** de  $u$  est :  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Un vecteur de norme 1 est dit **normé**.

Remarque : on note parfois  $u^2 = \langle u, u \rangle$  le **carré scalaire** de  $u$ .

**Exercice 2** : Montrer que :  $\forall u, v \in \mathbf{R}^2$  ou  $\mathbf{R}^3$ ,  $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ .

PROPOSITION

$$\forall u, v \in \mathbf{R}^2 \text{ ou } \mathbf{R}^3, \langle u, v \rangle = \|u\| \times \|v\| \times \cos(\widehat{u, v})$$

DÉFINITION

Deux vecteurs du plan ou de l'espace sont dits **orthogonaux** lorsque leur produit scalaire est nul.

$$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$$

Une famille de vecteurs du plan ou de l'espace est dite **orthogonale** si les vecteurs de cette famille sont 2 à 2 orthogonaux. Si de plus ils sont normés, alors on dit que la famille est **orthonormale**.

Exemple : les bases canoniques de  $\mathbf{R}^2$  ou de  $\mathbf{R}^3$  sont des bases orthonormales.

### 2 Droites du plan $\mathcal{P}$

#### a) Droite donnée par un point et un vecteur-directeur

Soit  $\mathcal{D}$  la droite passant par un point  $A(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$  et de vecteur-directeur  $u = (a, b) \in \mathbf{R}^2$ .

Alors  $M(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$  et  $u$  sont colinéaires  $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, u) = 0$

$$\Leftrightarrow b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0 : \text{on a trouvé une équation cartésienne de } \mathcal{D}.$$

Réiproquement : soit  $\mathcal{D}$  une droite d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$ ,  $a, b, c \in \mathbf{R}$  et  $(a, b) \neq (0, 0)$ .  
Alors  $\mathcal{D}$  admet pour vecteur-directeur le vecteur  $u = (-b, a)$ .

De plus :  $M(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$  et  $u$  sont colinéaires  $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda u = (\lambda a, \lambda b)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbf{R}) : \text{c'est une représentation paramétrique de } \mathcal{D}.$$

#### b) Droite donnée par deux points distincts

Soit  $\mathcal{D}$  la droite passant par les points  $A(x_0, y_0)$  et  $B(x_1, y_1) \in \mathcal{P}$ .

On applique la méthode précédente en utilisant le vecteur-directeur  $u = \overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ .

#### c) Droite donnée par un point et un vecteur-normal

Soit  $\mathcal{D}$  la droite passant par un point  $A(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$  et de vecteur-normal  $n = (a, b) \in \mathbf{R}^2$ .

Alors  $M(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$  et  $n$  sont orthogonaux  $\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM}, n \rangle = 0$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 : \text{c'est une équation cartésienne de } \mathcal{D}.$$

Réiproquement : soit  $\mathcal{D}$  une droite d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$ ,  $a, b, c \in \mathbf{R}$  et  $(a, b) \neq (0, 0)$ .  
Alors  $\mathcal{D}$  admet pour vecteur-normal le vecteur  $n = (a, b)$ .

**Exercice 3 :** Soit  $\mathcal{D}$  la droite du plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne :  $2x + 3y + 7 = 0$ .

On considère le point  $A(-1, 2)$ , le vecteur  $u = (3, 2)$  et la droite  $\Delta$  passant par  $A$  et dirigée par  $u$ .

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite  $\mathcal{D}'$  passant par  $A$  et perpendiculaire à  $\mathcal{D}$ .
2. Déterminer l'intersection entre  $\mathcal{D}$  et  $\Delta$ .

### 3 Cercles du plan $\mathcal{P}$

#### a) Cercle donné par son centre et son rayon

Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $\Omega(x_0, y_0)$  et de rayon  $R \in \mathbf{R}_+^*$ .

Alors  $M(x, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 = R^2$   
 $\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$  ce qui donne l'équation cartésienne du cercle  $\mathcal{C}$ .

#### b) Cercle donné par un diamètre

Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de diamètre  $[AB]$  où  $A(x_1, y_1)$  et  $B(x_2, y_2)$  sont deux points distincts du plan.

Alors  $M(x, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{BM}$  sont orthogonaux  
 $\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \rangle = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

#### c) Représentation paramétrique d'un cercle

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle d'équation :  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x - x_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{R}\right)^2 = 1$ .

On pose  $\frac{x - x_0}{R} = \cos(\theta)$ , on a  $\frac{y - y_0}{R} = \sin(\theta)$  et  $\mathcal{C} : \begin{cases} x = x_0 + R \cos(\theta) \\ y = y_0 + R \sin(\theta) \end{cases} \quad (\theta \in \mathbf{R})$

#### d) Éléments caractéristiques d'un cercle

Soit  $E = \{M(x, y) \in \mathcal{P}, x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$  où  $a, b, c$  sont trois réels donnés.

alors  $E : \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = d$  où  $d = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$ . Si  $d < 0$ , alors  $E = \emptyset$ .

Si  $d \geq 0$ , alors  $E$  est le cercle de centre  $\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$  et de rayon  $R = \sqrt{d}$ .

**Exercice 4 :**

1. Déterminer une équation du cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[AB]$ , où  $A(3, 1)$  et  $B(7, -1)$ .

Préciser son centre et son rayon.

2. Déterminer l'ensemble  $E = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid x^2 + y^2 - 8x - 6y + 10 = 0\}$ , puis préciser  $\mathcal{C} \cap E$ .

3. Soit  $\mathcal{D}$  la droite d'équation :  $x + 3y - 4 = 0$ . Déterminer  $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ .

### 4 Plans de l'espace $\mathcal{E}$

#### a) Plan donné par un point et deux vecteur-directeurs non colinéaires

Soit  $\mathcal{P}$  le plan passant par  $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$  et dirigé par  $u = (a, b, c)$ ,  $v = (a', b', c')$ ,  $u, v$  non colinéaires.

Alors  $M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$  est une combinaison linéaire de  $u$  et  $v \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda u + \mu v$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$$

On a trouvé un **système d'équations paramétriques** du plan  $\mathcal{P}$ .

On peut y lire directement les coordonnées de 2 vecteurs directeurs de  $\mathcal{P}$ , et d'un point  $A \in \mathcal{P}$ .

#### b) Plan donné par trois points non alignés

*Rappel* : trois points non alignés  $A, B, C$  de l'espace définissent un plan, noté  $(ABC)$ .

On trouve des équations paramétriques de  $(ABC)$  par la méthode précédente, avec  $u = \overrightarrow{AB}$  et  $v = \overrightarrow{AC}$ .

#### c) Plan donné par un point et un vecteur-normal

Soit  $\mathcal{P}$  le plan passant par un point  $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$  et de vecteur-normal  $n(a, b, c)$ .

Alors  $M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$  et  $n$  sont orthogonaux  $\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM}, n \rangle = 0$   
 $\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$  : c'est une **équation cartésienne** de  $\mathcal{P}$ .

Réiproquement :

Soit  $\mathcal{P}$  un plan d'équation cartésienne  $ax + by + cz + d = 0$ ,  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$  et  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ .

Alors  $n = (a, b, c)$  est un vecteur-normal au plan  $\mathcal{P}$ . Tout vecteur non nul et orthogonal à  $n$  dirige  $\mathcal{P}$ .

## 5 Droites dans l'espace $\mathcal{E}$

### a) Droite donnée par un point et un vecteur-directeur

Soit  $\mathcal{D}$  la droite passant par un point  $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$  et de vecteur-directeur  $u = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ .

Alors :  $M(x, y, z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$  et  $u$  sont colinéaires  $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda u = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}, \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} : \text{c'est une représentation paramétrique de } \mathcal{D}.$$

Si  $\mathcal{D} = (AB)$  avec  $A, B$  deux points distincts de l'espace, on utilise le vecteur  $u = \overrightarrow{AB}$ .

### b) Intersection de plans dans l'espace

Deux plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  de l'espace sont :

- \* ou bien parallèles (strictement ou confondus),
- \* ou bien sécants, et leur intersection est alors une droite.

Soient  $\mathcal{P}_1 : ax + by + cz + d = 0$  et  $\mathcal{P}_2 : a'x + b'y + c'z + d' = 0$  deux plans de l'espace.

Alors  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont parallèles si et seulement si ils ont des vecteurs normaux colinéaires :

$\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont parallèles  $\Leftrightarrow n_1 = (a, b, c)$  et  $n_2 = (a', b', c')$  sont colinéaires

Si  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  ne sont pas parallèles, on pose  $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ .

Alors  $\mathcal{D}$  admet un **système d'équations cartésiennes** :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \mathcal{P}_1 \\ M \in \mathcal{P}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Si  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont donnés l'un par une équation cartésienne, et l'autre par une représentation paramétrique :

$$\mathcal{P}_1 : ax + by + cz + d = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 : \begin{cases} x = x_0 + \lambda \alpha + \mu \alpha' \\ y = y_0 + \lambda \beta + \mu \beta' \\ z = z_0 + \lambda \gamma + \mu \gamma' \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$$

Alors  $n = (a, b, c)$  est normal à  $\mathcal{P}_1$ ,  $u = (\alpha, \beta, \gamma)$  et  $v = (\alpha', \beta', \gamma')$  dirigent  $\mathcal{P}_2$ ,

On exprime  $\mu$  en fonction de  $\lambda$  grâce à :  $a(x_0 + \lambda \alpha + \mu \alpha') + b(y_0 + \lambda \beta + \mu \beta') + c(z_0 + \lambda \gamma + \mu \gamma') + d = 0$

On remplace  $\mu$  dans la représentation paramétrique de  $\mathcal{P}_2$  pour obtenir un paramétrage de  $\mathcal{D}$ .

### Exercice 5 :

On considère dans l'espace les points  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(2, 1, -1)$  et  $C(3, 2, 1)$ . Soit  $n = (1, 1, 2) \in \mathbf{R}^3$ .

1. Montrer que les points  $A, B, C$  ne sont pas alignés. On pose  $\mathcal{P}_1$  le plan  $(ABC)$ .
2. Déterminer une équation cartésienne de  $\mathcal{P}_1$ .
3. Soit  $\mathcal{P}_2$  le plan passant par  $A$  et de vecteur-normal  $n$ . Montrer que  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont sécants.
4. Soit  $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ . Déterminer une représentation paramétrique de  $\mathcal{D}$ .

## II Produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$

### 1 Définition

DÉFINITION

Soient  $u = (x_1, \dots, x_n)$  et  $v = (y_1, \dots, y_n)$  deux vecteurs de  $\mathbf{R}^n$ .

Alors le **produit scalaire** de  $u$  et  $v$  est le réel défini par :  $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

### Écriture matricielle dans la base canonique :

Soient  $U = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$  et  $V = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(v)$ , où  $\mathcal{C}$  désigne la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ .

Alors  $U^T = (x_1 \dots x_n)$  et  $V = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  donc :  $\langle u, v \rangle = U^T V$ .

DÉFINITION

Soit  $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ . La **norme euclidienne** de  $u$  est le réel :  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ .  
Un vecteur de norme 1 est dit **normé**, ou **unitaire**.

Exercice 6 : Dans  $\mathbf{R}^4$ , on pose  $u = (1, 2, 3, 4)$  et  $v = (1, -1, 1, -1)$ . Calculer  $\langle u, v \rangle$ ,  $\|u\|$  et  $\|v\|$ .

## 2 Propriétés

### PROPRIÉTÉ

- \* le produit scalaire est **bilinéaire** :  
 $\forall u_1, u_2, v \in \mathbf{R}^n, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \langle \lambda u_1 + u_2, v \rangle = \lambda \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$   
 $\forall u, v_1, v_2 \in \mathbf{R}^n, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \langle u, \lambda v_1 + v_2 \rangle = \lambda \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$
- \* le produit scalaire est **symétrique** :  $\forall u, v \in \mathbf{R}^n, \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- \* le produit scalaire est **positif** :  $\forall u \in \mathbf{R}^n, \langle u, u \rangle \geq 0$ .
- \* le produit scalaire est **défini** :  $\forall u \in \mathbf{R}^n, \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ .

### PROPOSITION \*\* Inégalité de Cauchy-Schwarz \*\*

$|\forall u, v \in \mathbf{R}^n, |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \times \|v\|$  avec égalité si et seulement si  $u$  et  $v$  sont colinéaires.

### PROPRIÉTÉ

- \*  $\forall u \in \mathbf{R}^n, \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- \*  $\forall u \in \mathbf{R}^n, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \|\lambda u\| = |\lambda| \times \|u\|$
- \*  $\forall u, v \in \mathbf{R}^n, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  (inégalité triangulaire).  
et  $\|u + v\| = \|u\| + \|v\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}_+, u = \lambda v$  ou  $v = \lambda u$  ( $u, v$  colinéaires et de même sens).

## 3 Orthogonalité

### DÉFINITION

Deux vecteurs de  $\mathbf{R}^n$  sont **orthogonaux** lorsque leur produit scalaire est nul :  $u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$ .  
Deux matrice-colonnes  $M, N \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  sont dites orthogonales ssi  $M^T N = 0$ .

Une famille de vecteurs de  $\mathbf{R}^n$  est dite **orthogonale** si les vecteurs de cette famille sont 2 à 2 orthogonaux. Si de plus ils sont normés, alors on dit que la famille est **orthonormale**.

*Exemple* : la base canonique de  $\mathbf{R}^n$  est une famille orthonormale.

**Méthode** : on obtient une famille orthonormale à partir d'une famille orthogonale en multipliant tout vecteur de cette famille par l'inverse de sa norme.

### PROPOSITION

$|\text{Toute famille orthogonale de } \mathbf{R}^n \text{ ne contenant pas le vecteur nul est libre.}$

### THÉORÈME \*\* Théorème de Pythagore \*\*

$|\text{Soient } u, v \text{ orthogonaux dans } \mathbf{R}^n. \text{ Alors : } \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

## 4 Bases orthonormales

### DÉFINITION

Une base de  $\mathbf{R}^n$  qui est aussi une famille orthonormale est appelée **base orthonormale** de  $\mathbf{R}^n$ .

### PROPOSITION \*\* Caractérisation des bases orthonormales \*\*

- Soit  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$  une famille de  $\mathbf{R}^n$ , de cardinal  $n$ .
- Alors  $\mathcal{B}$  est une base orthonormale de  $\mathbf{R}^n \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

*Remarque* : on utilise aussi cette caractérisation pour des bases orthonormales de sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^n$ , de dimension  $p$ . Il faut alors s'assurer que  $\text{card}(\mathcal{B}) = p$ .

### THÉORÈME (admis)

$|\text{Tout sous-espace vectoriel non nul de } \mathbf{R}^n \text{ admet une base orthonormale.}$

**Exercice 7** : Dans  $\mathbf{R}^4$ , on pose  $u = (1, 1, 1, 1)$ ,  $v = (0, 1, 0, 1)$ ,  $w = (0, 0, 1, 0)$  et  $F = \text{Vect}(u, v, w)$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  est une base de  $F$ .
2. Construire une base orthonormale  $(a, b, c)$  de  $F$  telle que :  $\begin{cases} \text{Vect}(a) = \text{Vect}(u) \\ \text{Vect}(a, b) = \text{Vect}(u, v) \end{cases}$

### PROPOSITION

$|\text{Le produit scalaire et donc la norme se calculent de la même façon dans toutes les bases orthonormales de } \mathbf{R}^n : \text{ soient } u, v \in \mathbf{R}^n, \text{ soit } \mathcal{B} \text{ une base orthonormale de } \mathbf{R}^n.$

On pose  $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u), V = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ .

Alors :  $\langle u, v \rangle = U^T V = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  où  $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $V = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

### COROLLAIRE

$|\text{La matrice de passage entre 2 bases orthonormales de } \mathbf{R}^n \text{ vérifie : } P^T P = I_n \text{ (ie : } P^{-1} = P^T).$

## THÉORÈME      \*\* Théorème spectral (version complète) \*\*

Soit  $A$  une matrice symétrique à coefficients réels :  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ .

1) On suppose que  $\lambda, \mu$  sont deux valeurs propres distinctes de  $A$ .

Soient  $X \in E_\lambda$  et  $Y \in E_\mu$ . Alors  $X$  et  $Y$  sont orthogonales :  $X^T Y = 0$ .

2)  $A$  est diagonalisable, et il existe une base orthonormale de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  constituée de vecteurs propres.

## III Projections orthogonales

### 1 Orthogonal d'un s-ev de $\mathbf{R}^n$

#### DÉFINITION

Soit  $A$  une partie de  $\mathbf{R}^n$ . On appelle **orthogonal** de  $A$ , et on note  $A^\perp$ , le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$  constitué des vecteurs qui sont orthogonaux à tout vecteur de  $A$ .

$$A^\perp = \{u \in \mathbf{R}^n \mid \forall v \in A, u \perp v\}$$

#### PROPOSITION

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$ . Alors :

1.  $F \cap F^\perp = \{0_{\mathbf{R}^n}\}$ .
2.  $\forall u \in \mathbf{R}^n, \exists! (u_F, u_{F^\perp}) \in F \times F^\perp \mid u = u_F + u_{F^\perp}$

**Exercice 8 :** Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^4$  défini par :  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid y - t = 0\}$ .

Déterminer  $F^\perp$ . Soit  $u = (1, 1, 0, 0)$ . Trouver  $v \in F$ ,  $w \in F^\perp$  tels que :  $u = v + w$ .

### 2 Projection orthogonale sur un s-ev de $\mathbf{R}^n$

#### DÉFINITION

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$ . On appelle **projection orthogonale** sur  $F$  l'endomorphisme  $p_F$  de  $\mathbf{R}^n$  défini par :  $\forall u \in \mathbf{R}^n, u = u_F + u_{F^\perp}$  et on pose :  $p_F(u) = u_F$ .

*Exemples :*  $p_{\mathbf{R}^n} = \text{Id}_{\mathbf{R}^n}$  et  $p_{\{0\}} = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)}$

#### PROPRIÉTÉ

Soit  $F$  un sous-espace de  $\mathbf{R}^n$  et  $p_F$  la projection orthogonale sur  $F$ . Alors :

1.  $p_F \circ p_F = p_F$
2.  $\text{Im}(p_F) = F$
3.  $\text{Ker}(p_F) = F^\perp$

#### COROLLAIRE

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$ . Alors :  $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$ .

#### PROPRIÉTÉ      \*\* Expression de la projection orthogonale \*\*

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$  non nul, de base  $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_r)$ .

1. si  $\mathcal{B}$  est orthogonale, alors :  $\forall u \in \mathbf{R}^n, p_F(u) = \sum_{i=1}^r \frac{\langle u, f_i \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle} f_i$
2. si  $\mathcal{B}$  est orthonormale, alors :  $\forall u \in \mathbf{R}^n, p_F(u) = \sum_{i=1}^r \langle u, f_i \rangle f_i$

**Exercice 9 :** Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^4$  défini par :  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid y - t = 0\}$ .

1. Déterminer le projeté orthogonal de  $u = (1, 1, 0, 0)$  sur  $F$ .

2. Déterminer la matrice  $M$  de la projection orthogonale  $p_F$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^4$ .

### 3 Distances dans $\mathbf{R}^n$

#### DÉFINITION

On appelle **distance euclidienne** (ou simplement : distance) entre deux vecteurs de  $\mathbf{R}^n$  la norme euclidienne de leur différence :  $\forall u, v \in \mathbf{R}^n, d(u, v) = \|u - v\|$

**Exercice 10 :** Calculer dans  $\mathbf{R}^4$  la distance entre  $u = (1, 1, 0, 0)$  et  $v = (0, 1, 0, 1)$ .

#### PROPRIÉTÉ

Soient  $u, v, w \in \mathbf{R}^n$ . Alors :

- \*  $d(u, v) = d(v, u)$
- \*  $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
- \*  $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$

## DÉFINITION

Soit  $A \subset \mathbf{R}^n$  non vide, et soit  $u \in \mathbf{R}^n$ . La distance de  $u$  à  $A$  est :  $d(u, A) = \inf \{d(u, a), a \in A\}$ .

## PROPOSITION

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$ , et soit  $u \in \mathbf{R}^n$ . Alors :  $d(u, F) = \|u - p_F(u)\|$ .  
De plus, si  $v \in F$  et si  $d(u, v) = d(u, F)$ , alors  $v = p_F(u)$ .

**Exercice 11 :** Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^4$  défini par :  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid y - t = 0\}$ .  
On pose  $u = (1, 1, 0, 0)$ . Déterminer  $d(u, F)$ .

## 4 Application : ajustement affine par la méthode des moindres carrés

On dispose d'un relevé  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$  de  $n$  points du plan, par exemple issus de données expérimentales.

On cherche une relation affine liant les abscisses  $x_i$  aux ordonnées  $y_i$  de ces points :  $y_i = ax_i + b$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ).

Si les points  $M_i(x_i, y_i)$  ne sont pas tous alignés, on n'obtiendra pas une relation exacte.

On cherche alors la "meilleure" relation affine, au sens où la somme des carrés des distances entre les points  $M_i$  et les points de la droite  $\Delta : y = ax + b$  de mêmes abscisses est minimale.

On cherche donc à minimiser :  $S = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$ .

On pose dans  $\mathbf{R}^n$  :  $u = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $v = (1, \dots, 1)$  et  $w = (y_1, \dots, y_n)$ .

Alors  $S = \|w - (au + bv)\|^2$  et  $\{au + bv, a, b \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}(u, v) = F$ .

$u, v$  ne sont pas colinéaires (car sinon les  $x_i$  sont tous égaux et les points  $M_i$  sont alignés), donc  $\dim(F) = 2$ .

La somme  $S$  est minimale lorsque  $au + bv = p_F(w)$ .

On cherche donc une base orthogonale de  $F$ , par exemple  $(v, v_0)$  avec  $v_0 \in F$ , non nul, tel que  $\langle v_0, v \rangle = 0$ .

On pose  $v_0 = \alpha u + \beta v$ . Alors  $\langle v_0, u \rangle = \alpha \langle u, u \rangle + \beta \langle v, u \rangle = \alpha \langle u, u \rangle + n\beta = 0$  donc  $\beta = -\frac{\alpha}{n} \langle u, v \rangle$

et en choisissant  $\alpha = 1$ , on obtient :  $v_0 = u - \frac{\langle u, v \rangle}{n} v$ . On peut enfin calculer  $p_F(w)$  et trouver  $a$  et  $b$ .

**Exercice 12 :** appliquer cette méthode aux points  $(1, 2)$ ,  $(2, 8)$ ,  $(3, 12)$ ,  $(4, 14)$ .

## 5 Projection dans le plan $\mathcal{P}$

Soit  $M(x_0, y_0)$  un point du plan, et  $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$  une droite connue par une équation cartésienne.

Le **projété orthogonal**  $H$  de  $M$  sur  $\mathcal{D}$  est l'intersection de  $\mathcal{D}$  avec l'unique droite perpendiculaire à  $\mathcal{D}$  et passant par  $M$ . La distance entre  $M$  et la droite  $\mathcal{D}$  est donnée par :  $d(M, \mathcal{D}) = MH$ .

Soient  $u = \vec{OM}$ ,  $n = (a, b)$  vecteur-normal à  $\mathcal{D}$ . Alors :  $\vec{MH}$  est colinéaire à  $n$  :  $\exists \lambda \in \mathbf{R}$ ,  $\vec{MH} = \lambda n$ .

Puis  $H \in \mathcal{D}$  donne :  $a(x_0 + a\lambda) + b(y_0 + b\lambda) + c = 0$  dont on déduit que :  $\lambda = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$

On a donc :  $MH = |\lambda| \times \|n\| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

## 6 Projection dans l'espace $\mathcal{E}$

Soit  $M(x_0, y_0, z_0)$  un point de l'espace, et  $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$  un plan connu par une équation cartésienne. Le **projété orthogonal**  $H$  de  $M$  sur  $\mathcal{P}$  est l'intersection de  $\mathcal{P}$  avec l'unique droite perpendiculaire à  $\mathcal{P}$  et passant par  $M$ . La distance entre  $M$  et le plan  $\mathcal{P}$  est donnée par :  $d(M, \mathcal{P}) = MH$ .

Soit  $n = (a, b, c)$  un vecteur-normal à  $\mathcal{P}$ . On trouve les coordonnées de  $H$  en exprimant :  $\begin{cases} H \in \mathcal{P} \\ n \text{ et } \vec{MH} \text{ sont colinéaires} \end{cases}$

$\vec{MH} = \lambda n$  donc  $H \in \mathcal{P} \Leftrightarrow a(x_0 + a\lambda) + b(y_0 + b\lambda) + c(z_0 + c\lambda) + d = 0$  donc  $\lambda = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$

Enfin,  $d(M, \mathcal{P}) = MH = |\lambda| \times \|n\|$  donc  $MH = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ .

**Exercice 13 :** Déterminer la distance entre le point  $M(1, 2, 3)$  et le plan  $\mathcal{P} : x + y + z + 3 = 0$ .

Préciser les coordonnées du projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{P}$ .