On considère dans tout le chapitre un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$.
Les variables aléatoires utilisées dans ce chapitre sont toutes définies sur le même univers Ω.
Sauf mention explicite, elles seront réelles discrètes (VARD).

I Lois issues d'un couple de VARD

1 Couple de VARD

DÉFINITION *- pour des VAR discrètes ou à densité -*

On appelle **couple** de variables aléatoires réelles toute application

$$\begin{aligned} Z : \Omega &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

où X et Y sont des VAR définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$. On note $Z = (X, Y)$.

Notations : $\forall x, y \in \mathbf{R}$, on note $[X = x, Y = y]$ l'événement $\big[(X = x) \cap (Y = y)\big] = \big[(X, Y) = (x, y)\big]$.

$\forall I, J$ intervalles réels, on note $[X \in I, Y \in J]$ l'événement $\big[(X \in I) \cap (Y \in J)\big] = \big[(X, Y) \in I \times J\big]$.

Exemples :

- On lance deux dés. On note X le plus petit des deux nombres obtenus et Y le plus grand des deux. Alors, $Z = (X, Y)$ est un couple de VARD et : $Z(\Omega) = \{(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2,\ i \leqslant j\}$.
L'événement $[X \leqslant 3, Y = 4]$ signifie " le plus petit dé vaut $1, 2$ ou 3, et le plus grand vaut 4 ".
- On lance une pièce une infinité de fois, et on note X le rang d'apparition du premier 'Pile', et Y le rang d'apparition du second 'Pile'. Alors $Z = (X, Y)$ est un couple de VARD de support $Z(\Omega) = \big\{(a, b) \in (\mathbf{N}^\star)^2 \mid a < b\big\}$. L'événement $[X < 5, Y > 10]$ est "le premier 'Pile' est apparu avant le $5^{\text{ème}}$ lancer, et le second après le $10^{\text{ème}}$."

PROPOSITION

Soient X, Y des VARD. On note $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$ avec $I, J \subset \mathbf{N}$.
Alors $\Big(\big[X = x_i, Y = y_j\big]\Big)_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ est un système complet d'événements associé au couple (X, Y).

2 Loi conjointe

DÉFINITION

Soit (X, Y) un couple de VARD. L'application :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{X,Y} : X(\Omega) \times Y(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ (x, y) &\longmapsto \mathbf{P}\big(X = x, Y = y\big) \end{aligned}$$

est appelée **loi conjointe** du couple (X, Y).

Exercice 1 : Déterminer les lois conjointes dans les deux exemples précédents.

Rq : Si X, Y sont d'univers-images **finis**, on peut résumer la loi conjointe du couple (X, Y) par un tableau.

PROPOSITION

- Soit (X, Y) un couple de VAR tel que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Alors :
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{P}\big(X = x_i, Y = y_j\big) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\big(X = x_i, Y = y_j\big) = 1$$
- Soit (X, Y) un couple de VAR tel que $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathbf{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in \mathbf{N}\}$. Alors :
$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}\big(X = x_i, Y = y_j\big) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}\big(X = x_i, Y = y_j\big) = 1$$

3 Lois marginales

DÉFINITION

Soit (X, Y) un couple de VARD. On appelle **lois marginales** de (X, Y) les lois de probabilités des variables aléatoires X et Y : celle de X est la **première loi marginale du couple** (X, Y), et celle de Y est la **deuxième loi marginale du couple** (X, Y).

THÉORÈME

Soit (X, Y) un couple de VARD tel que $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$.
Alors, on peut retrouver les lois de X et Y à partir de la loi conjointe :

$$\forall i \in I,\ \mathbf{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} \mathbf{P}\big(X = x_i, Y = y_j\big) \quad \text{et} \quad \forall j \in J,\ \mathbf{P}(Y = y_j) = \sum_{i \in I} \mathbf{P}\big(X = x_i, Y = y_j\big)$$

Remarque 1 : Si I, J sont finis, on obtient à partir du tableau de la loi conjointe :

* $*$ la loi de X en sommant les termes d'une même ligne,
* $*$ la loi de Y en sommant les termes d'une même colonne (selon la disposition choisie).

Remarque 2 : si $I, J = \mathbf{N}$, alors les sommes sont des sommes de séries absolument convergentes.

Exercice 2 : Déterminer les lois marginales de X et de Y des deux exemples précédents.

Attention : En général, les lois marginales ne permettent pas de connaître la loi conjointe.

4 Lois conditionnelles

DÉFINITION

Soit (X, Y) un couple de VARD. Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(Y = y) \neq 0$, l'application :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{[Y=y]} : X(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto \mathbf{P}_{[Y=y]}(X = x) = \frac{\mathbf{P}\big(X = x, Y = y\big)}{\mathbf{P}(Y = y)} \end{aligned}$$

est appelée **loi conditionnelle** de X sachant $[Y = y]$.

La **loi de** X **sachant** Y est la donnée de $\mathbf{P}_{[Y=y]}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$.

Remarque : on définit de façon similaire la loi de Y sachant X.

PROPOSITION

Soit (X, Y) un couple de VARD. Alors on peut retrouver la loi marginale de X à partir de la loi de X sachant Y et de la loi marginale de Y :

* $*$ si Y est finie : $\forall\, i \in I,\ \mathbf{P}(X = x_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \mathbf{P}(Y = y_j)\ \mathbf{P}_{[Y=y_j]}\big(X = x_i\big)$
* $*$ si Y est infinie dénombrable : $\forall\, i \in I,\ \mathbf{P}(X = x_i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = y_j)\ \mathbf{P}_{[Y=y_j]}\big(X = x_i\big)$

Exercice 3 : Soient $\lambda > 0$ et $p \in]0, 1[$. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ, et que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, sachant que $[Y = n]$ est réalisé, X suit une loi binomiale de paramètres n, p. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y), puis la loi marginale de X.

II Fonction d'un couple de VARD

1 Loi de $f(X, Y)$

DÉFINITION

Soit (X, Y) un couple de VARD, et soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une application.

La VAR notée $f(X, Y)$ est définie par : $\quad \begin{aligned} f(X,Y) : \Omega &\longrightarrow \mathbf{R} \\ \omega &\longmapsto f\big(X(\omega), Y(\omega)\big) \end{aligned}$

Exemple : La somme de deux VAR s'obtient en considérant $f : (x, y) \mapsto x+y$. On notera $f(X, Y) = X+Y$.

PROPOSITION

La loi de $S = f(X, Y)$ est donnée par :

$$\forall\, s \in S(\Omega), \quad \mathbf{P}(S = s) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ f(x,y) = s}} \mathbf{P}\big(X = x, Y = y\big).$$

2 Théorème de transfert

THÉORÈME

Soit (X, Y) un couple de VAR **finies**, et soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une application. Alors :

$$\mathbf{E}(f(X, Y)) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} f(x_i, y_j)\mathbf{P}\big(X = x_i, Y = y_j\big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)p_{i,j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j)p_{i,j}$$

Exercice 4 : Déterminer l'espérance de $P = XY$, où X et Y sont les VAR du premier exemple.

3 Somme de VAR à valeurs dans N

PROPOSITION

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires telles que $X(\Omega), Y(\Omega) \subset \mathbf{N}$ (VAR **entières**).

La loi de $S = X + Y$ est donnée par :

$$\forall\, s \in S(\Omega), \quad \mathbf{P}(S = s) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}\big(X = x, Y = s - x\big).$$

Exercice 5 : On effectue trois tirages successifs et sans remise dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5. On note X le plus petit des numéros tirés et Y le plus grand.
En utilisant la loi conjointe du couple (X, Y), déterminer la loi de $S = X + Y$.

III Covariance et corrélation

Dans ce paragraphe, les énoncés sont valables aussi bien pour des VAR discrètes que pour des VAR à densité. Cependant, seul le cas des VAR discrètes est au programme.

1 Covariance

DÉFINITION

Soient X et Y deux VAR d'espérances respectives μ_x, μ_y. Si $(X - \mu_x)(Y - \mu_y)$ admet une espérance, on appelle **covariance** du couple (X, Y) le réel défini par :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}\big((X - \mu_x)(Y - \mu_y)\big).$$

La covariance est donc l'espérance du produit des VAR centrées associées à X et à Y.

Remarque : La covariance de X et Y est une valeur indicatrice de la façon dont l'une des deux VAR varie lorsque l'autre varie. Si la covariance est positive, les deux VAR augmentent ensemble ou diminuent ensemble. Si la covariance est négative, les VAR varient en sens contraire l'une de l'autre.

THÉORÈME ** **de König-Huygens** **

Si X, Y et XY admettent une espérance, alors (X, Y) admet une covariance, et :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X) \times \mathbf{E}(Y)}$$

Rq : si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors XY admet une espérance et le théorème s'applique.

PROPRIÉTÉ

Soient X, X', Y, Y' des VAR admettant un moment d'ordre 2, et a, b des réels. Alors on a :

- $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X)$
- $\mathrm{Cov}(Y, X) = \mathrm{Cov}(X, Y)$ (SYMÉTRIE)
- $\mathrm{Cov}(aX + bX', Y) = a\ \mathrm{Cov}(X, Y) + b\ \mathrm{Cov}(X', Y)$ (BILINÉARITÉ)
- $\mathrm{Cov}(X, aY + bY') = a\ \mathrm{Cov}(X, Y) + b\ \mathrm{Cov}(X, Y')$

THÉORÈME

Soit X, Y des VAR admettant un moment d'ordre 2. Alors, on a :

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y).$$

Plus généralement, pour tous réels a et b, on a :

$$\mathbf{V}(aX + bY) = a^2\ \mathbf{V}(X) + b^2\ \mathbf{V}(Y) + 2ab\ \mathrm{Cov}(X, Y).$$

2 Corrélation

DÉFINITION

Soit (X, Y) un couple de VAR possédant une covariance.
Alors on dit que X et Y sont **corrélées** si $\mathrm{Cov}(X, Y) \neq 0$.

X et Y sont *positivement corrélées* si $\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$: X et Y varient dans le même sens.
X et Y sont *négativement corrélées* si $\mathrm{Cov}(X, Y) < 0$: X et Y varient en sens inverse.

DÉFINITION *(Hors-programme)*

Soient X et Y deux VAR admettant un écart-type non nul.
On appelle **coefficient de corrélation linéaire** le réel : $\rho(X, Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

THÉORÈME *(Hors-programme)*

Soient X et Y deux VAR d'écart-types non nuls. Alors :

- $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$
- $|\rho(X, Y)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, a, b \in \mathbf{R}, \quad Y = aX + b.$

Le coefficient de corrélation linéaire mesure la dépendance linéaire de Y par rapport à X. On l'utilise pour tester la validité d'une loi, au regard de données expérimentales. Selon le contexte, on valide expérimentalement la loi lorsque $|\rho(X, Y)|$ est suffisamment proche de 1.

IV Indépendance

1 Rappels

Définition - *pour des VAR discrètes ou à densité* -

Deux variables aléatoires réelles X et Y sont dites **indépendantes** si et seulement si :

$$\forall I, J \text{ intervalles réels}, \quad \mathbf{P}\big(X \in I,\, Y \in J\big) = \mathbf{P}(X \in i) \times \mathbf{P}(Y \in J)$$

ie : pour tous intervalles réels I, J, les événements $[X \in I]$ et $[Y \in J]$ sont indépendants.

Proposition

Si X et Y sont deux VARD, alors X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y)$$

Exemple : Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire deux avec remise et on note X et Y les numéros des jetons obtenus respectivement au premier et second tirages. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. On peut alors dire que les événements $[X \in \{2, 4, 6\}]$ et $[Y = 2]$ sont indépendants, de même que les événements $[X = 3]$ et $[2 \leqslant Y \leqslant 5]$.
Si le tirage est effectué sans remise, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 6 : Soient X et Y indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p.
1) Déterminer la probabilité de l'événement $[X = Y]$.
2) Soit $m \in \mathbf{N}^\star$. Déterminer : $\mathbf{P}(X \geqslant mY)$.

2 Propriétés

Proposition

Si X et Y sont des VARD indépendantes, alors :

- La loi conjointe du couple (X, Y) est le produit des lois marginales.
- $\forall y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(Y = y) \neq 0$, la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ est égale à la loi de X : $\forall\,(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbf{P}_{[Y=y]}\big(X = x\big) = \mathbf{P}\big(X = x\big)$.
- $\forall x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(X = x) \neq 0$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$ est égale à la loi de Y : $\forall\,(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbf{P}_{[X=x]}\big(Y = y\big) = \mathbf{P}\big(Y = y\big)$.

Théorème - *pour des VAR discrètes ou à densité* -

Soient X et Y deux VAR indépendantes, admettant un moment d'ordre 2. Alors :

- $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y)$, en particulier $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, et $\rho(X, Y) = 0$ s'il existe,
- $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$.

Remarques :

* Le premier résultat assure que deux variables aléatoires indépendantes sont non corrélées.
  Attention ! La réciproque est fausse : $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y)$ n'implique pas X et Y indépendantes.
* Par contraposition, on montre que : si $\mathbf{E}(XY) \neq \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y)$, alors Xet Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 7 :
Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p \in]0, 1[$.
On pose $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

1. Déterminer la loi du couple (S, D),
2. Déterminer la covariance $\mathrm{Cov}(S, D)$.
3. Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

3 Stabilité de la loi binomiale

Théorème

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ deux variables aléatoires **indépendantes**.
Alors : $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m + n, p)$.

4 Stabilité de la loi de Poisson

Théorème

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ deux variables aléatoires **indépendantes**.
Alors : $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

V Familles de variables aléatoires

1 Définition

DÉFINITION *- pour des VAR discrètes ou à densité -*

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On appelle **vecteur de variables aléatoires réelles** toute application :

$$\begin{aligned} Z : \Omega &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ \omega &\longmapsto (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \end{aligned}$$

où $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$. On note $Z = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

DÉFINITION

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vecteur de variables aléatoires réelles **discrètes**. L'application :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(X_1,\ldots,X_n)} : X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto \mathbf{P}\big(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\big) \end{aligned}$$

est appelée **loi conjointe** du vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$.
Les **lois marginales** du vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ sont celles des VAR $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

2 Indépendance mutuelle (rappels)

Dans ce sous-paragraphe, les énoncés sont valables pour des VAR discrètes ou à densité.

DÉFINITION

$*$ Les VAR $X_1, \ldots, X_n$ sont dites **indépendantes** ou **mutuellement indépendantes** ssi :

pour tous intervalles réels $I_1, \ldots, I_n$, $\quad \mathbf{P}\big(X_1 \in I_1, \cdots, X_n \in I_n\big) = \mathbf{P}(X_1 \in I_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(X_n \in I_n)$.

ie : $\forall\, I_1, \ldots, I_n$ intervalles réels, les événements $[X_1 \in I_1], \ldots, [X_n \in I_n]$ sont indépendants.

$*$ Soit $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite de VAR. Les X_i $(i \in \mathbf{N})$ sont indépendantes si et seulement si pour toute partie I finie de $\mathbf{N}$, les VAR X_i $(i \in I)$ sont indépendantes.

PROPOSITION

Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de VAR indépendantes, alors toute sous-famille l'est aussi.

THÉORÈME $\quad **$ **Lemme des coalitions** $**$

Soit $(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_p)$ une famille de VAR indépendantes.

- Soient $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R}^{p-n} \longrightarrow \mathbf{R}$,
  alors les VAR $f(X_1, \ldots, X_n)$ et $g(X_{n+1}, \ldots, X_p)$ sont indépendantes.
- Soient $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$,
  alors les VAR $f_1(X_1), \ldots, f_p(X_p)$ sont indépendantes.

Exemple : Soient X, Y, Z, T des VAR indépendantes.
Alors $X^2 + Y$ et ZT sont indépendantes ; X, $2Y + e^Z$ et T^3 sont indépendantes.

3 Somme de variables aléatoires

PROPOSITION *- pour des VAR discrètes ou à densité -*

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille de variables aléatoires.

$*$ Si elles admettent des moments d'ordre 1, alors : $\mathbf{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_k)$.

$*$ Si elles admettent des moments d'ordre 2, alors :

$$\mathbf{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k) + 2 \times \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Si de plus elles sont indépendantes, on a : $\mathbf{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k)$.

4 Stabilité des lois de Poisson et binomiale

THÉORÈME

Soit $(X_1, \ldots, X_m)$ un vecteur de VAR indépendantes.

$*$ si $\forall k \in [\![1, m]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_k, p)$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^{m} n_k, p\right)$.

$*$ si $\forall k \in [\![1, m]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_k)$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} X_k \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k\right)$.