

I Fonction réelle de deux variables réelles

1 Cadre de l'étude

On étudie dans ce chapitre des fonctions réelles de deux variables réelles, c'est-à-dire des fonctions

$$f : \begin{cases} D \rightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \mapsto f(x, y) \end{cases}, \text{ où } D \text{ est une partie de } \mathbf{R}^2.$$

x et y sont donc des nombres réels, et l'image par f du couple (x, y) est un réel $z = f(x, y)$.

Exemple : la loi des gaz parfaits ($PV = nRT$) donne (pour une quantité de gaz n fixée) : $T = \frac{PV}{nR}$ c'est-à-dire que la température T est une fonction des variables P et V : $T = f(P, V)$.

On se limite dans ce chapitre à des fonctions de 2 variables. On peut cependant généraliser facilement tous les énoncés qui suivent à des fonctions de 3 variables ou plus.

L'ensemble de définition d'une fonction f de 2 variables x, y est l'ensemble \mathcal{D}_f des couples $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tels que $f(x, y)$ existe. On se limite ici à des **pavés** de \mathbf{R}^2 .

2 Pavés de \mathbf{R}^2

DÉFINITION

On appelle **pavé** de \mathbf{R}^2 toute partie $P \subset \mathbf{R}^2$ définie par : $P = I \times J = \{(x, y), x \in I, y \in J\}$ où I, J sont deux intervalles réels non vides, et non réduits à un point.

On parle de **pavé ouvert** si les intervalles I et J sont des intervalles ouverts.

Exemples : $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $\mathbf{R} \times [0, +\infty[$, $[0, 1] \times [-1, 1]$, $]0, 1[\times \mathbf{R}$ sont des pavés de \mathbf{R}^2 .

$f : (x, y) \mapsto \ln(x) - \sqrt{1 - y}$ est définie sur le pavé $\mathbf{R}_+^* \times]-\infty, 1]$.

3 Nappe d'une fonction de 2 variables

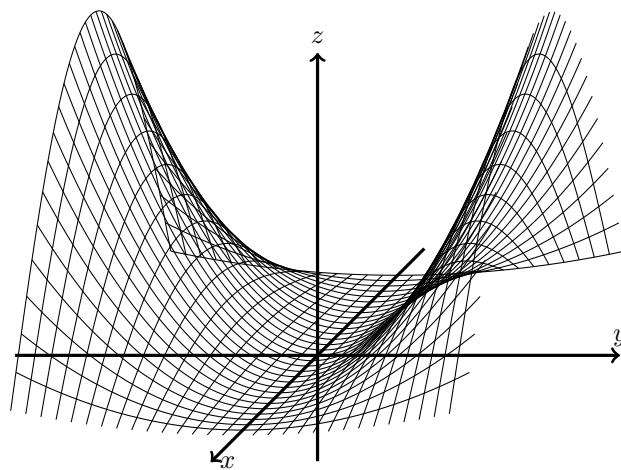
DÉFINITION

La représentation graphique d'une fonction $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbf{R}$ de deux variables est la partie de \mathbf{R}^3 définie par :

$$\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f, z = f(x, y)\}$$

On l'appelle **nappe** (ou surface) représentative de f .

Exemple : Nappe de $(x, y) \mapsto y^2 \cos x$, définie sur \mathbf{R}^2 :



4 Distance et limites dans \mathbf{R}^2

DÉFINITION

La **distance** entre deux couples (x, y) et (x', y') est la distance euclidienne entre les vecteurs $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$:

$$d((x, y), (x', y')) = d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

La **norme** du couple (x, y) est celle du vecteur u : $\|(x, y)\| = \|u\| = \sqrt{x^2 + y^2} = d((x, y), (0, 0))$.

DÉFINITION

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. On dit que (x, y) **tend vers** (x_0, y_0) dans \mathbf{R}^2 lorsque la distance $d((x, y), (x_0, y_0))$ tend vers 0 dans \mathbf{R}_+ .

Soit $\ell \in \mathbf{R}$. On dit que la fonction f a **pour limite** ℓ , **converge** ou **tend** vers ℓ en (x_0, y_0) si et seulement si $f(x, y)$ tend vers ℓ quand (x, y) tend vers (x_0, y_0) :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in \mathcal{D}_f, d((x, y), (x_0, y_0)) < \alpha \Rightarrow |f(x, y) - \ell| < \varepsilon$$

Exercice 1 : Étudier les limites en $(0, 0)$ des fonctions $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ et $g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

5 Continuité

DÉFINITION

Soit \mathcal{D}_f un pavé ouvert de \mathbf{R}^2 , et soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbf{R}$.

- On dit que f est **continue en** $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ lorsque : $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.
- On dit que f est **continue sur** \mathcal{D}_f lorsque f est continue en tout point de \mathcal{D}_f .

Remarque : On prouve la continuité de fonctions de deux variables en invoquant les règles d'opérations pour les fonctions d'une variable. Par exemple, toute fonction polynomiale de deux variables (comme : $f(x, y) = 2x^3 - 3xy + 5y^2$) est définie et continue sur \mathbf{R}^2 . En pratique, on ne demandera jamais de prouver la continuité d'une fonction de deux variables.

6 Fonctions partielles

DÉFINITION

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbf{R}$, où $\mathcal{D}_f = I \times J$ est un pavé de \mathbf{R}^2 , et soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$.

On appelle **première fonction partielle de f associée à (x_0, y_0)** la fonction $f_1 : \begin{cases} I \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto f(x, y_0) \end{cases}$

On appelle **deuxième fonction partielle de f associée à (x_0, y_0)** la fonction $f_2 : \begin{cases} J \rightarrow \mathbf{R} \\ y \mapsto f(x_0, y) \end{cases}$

On retient que f_1 ne fait varier que la première variable, f_2 ne fait varier que la deuxième variable.

Les représentations graphiques des fonctions partielles s'obtiennent par intersection de la nappe Γ_f et des plans d'équations $y = y_0$, ou $x = x_0$.

Exercice 2 : Soit $f(x, y) = 2x \ln(1 + y^2)$ définie sur \mathbf{R}^2 . Expliciter les fonctions partielles de f associées à $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Que dire des intersections de la nappe Γ_f avec les plans verticaux d'équations $y = y_0$?

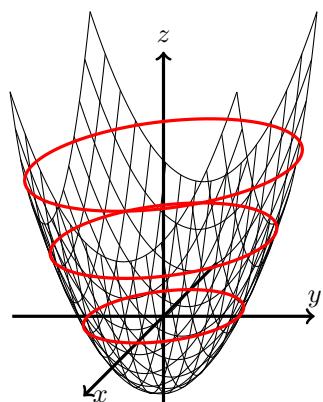
7 Courbes de niveau

DÉFINITION

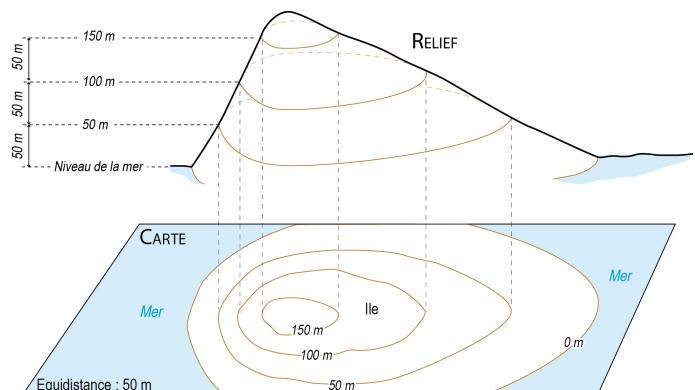
Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbf{R}$ où \mathcal{D}_f est un pavé de \mathbf{R}^2 , représentée par une nappe Γ_f .

On appelle **courbe de niveau** de f (ou **lignes de niveau**) toute intersection de Γ_f avec un plan horizontal d'équation $z = z_0$.

Exemples : Courbes de niveau pour $z_0 = 0, 1$ ou 2 de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$.



Exemple de courbe de niveau en cartographie :



II Dérivées partielles

1 Définition

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de deux variables définie sur un pavé ouvert $\mathcal{D}_f = I \times J$ de \mathbf{R}^2 .

On suppose ici que, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, les fonctions partielles f_1 et f_2 associées à (x, y) sont dérivables, respectivement sur I et sur J .

DÉFINITION

- La **première dérivée partielle** de f est la fonction $\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{cases} \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \end{cases}$
- La **seconde dérivée partielle** de f est la fonction $\frac{\partial f}{\partial y} : \begin{cases} \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \end{cases}$

Autrement dit, si (x, y) est un point de \mathcal{D}_f , alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f'_1(x)$, et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f'_2(y)$.

Pour déterminer des dérivées partielles, on dérive l'expression selon une variable, en considérant les autres variables comme des constantes.

Exercice 3 : Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$* f : (x, y) \mapsto x^3 + 2xy + 4 \quad * g : (x, y) \mapsto \frac{x + e^y}{x^2 + 1}$$

2 Fonction de classe \mathcal{C}^1

DÉFINITION

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie sur un pavé ouvert de \mathbf{R}^2 .

On dit que f est **de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{D}_f** lorsque ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur \mathcal{D}_f .

Attention ! Il ne suffit pas que les fonctions partielles f_1 et f_2 soient de classe \mathcal{C}^1 sur I ou sur J .

Exercice 4 : Soit $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

- 1) Expliciter les fonctions partielles f_1 et f_2 , et montrer qu'elles sont de classe \mathcal{C}^∞ .
- 2) Rappeler le résultat trouvé à l'exercice 1. Qu'en déduire ?

3 Règles opératoires

Toutes les règles opératoires concernant la continuité et la dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle s'appliquent aux fonctions de plusieurs variables réelles.

PROPOSITION

Soient f, g deux fonctions définies sur un pavé ouvert \mathcal{D} de \mathbf{R}^2 . Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

* Si $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D})$, alors $f + g$, λf , $f \times g$, $\frac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas) sont continues sur \mathcal{D} .

* Si f et g admettent des dérivées partielles sur \mathcal{D} , alors $f + g$, λf , $f \times g$, $\frac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas) admettent des dérivées partielles sur \mathcal{D} et :

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \quad \frac{\partial(\lambda f)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial(fg)}{\partial x} = g \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial g}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{1}{g^2} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} \right)$$

et on dispose de formules similaires pour $\frac{\partial}{\partial y}$.

* Si $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$, alors $f + g$, λf , $f \times g$, $\frac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas) sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{D} .

* Toutes les fonctions usuelles sont de classe \mathcal{C}^1 sur des pavés ouverts où elles sont définies, sauf la fonction partie entière, et les fonctions valeur absolue et racines n ème en des points où elles s'annulent.

4 Dérivée d'une composée

PROPRIÉTÉ

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un pavé ouvert de \mathbf{R}^2 , et soit $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Alors $g \circ f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbf{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 , et :

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times g'(f(x, y)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \times g'(f(x, y))$$

Exercice 5 : On pose $f(x, y) = \frac{xy}{1 + e^x}$ et $g(t) = \sin(2t)$.

Déterminer $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(x, y)$ * en utilisant la formule ci-dessus,
* par un calcul direct.

PROPRIÉTÉ

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur le pavé ouvert $\mathcal{D}_f = I \times J$. Soient u, v deux fonctions dérivables sur une partie K de \mathbf{R} et à valeurs respectivement dans I et dans J .

Alors la fonction $g : t \mapsto f(u(t), v(t))$ est définie et dérivable sur K , de dérivée :

$$\forall t \in K, \quad g'(t) = u'(t) \times \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t) \times \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))$$

Exercice 6 : On pose $f(x, y) = x^3 + 2xy + 4y$, $u(t) = e^t$ et $v(t) = \sin(t)$.

Déterminer la dérivée de $g : t \mapsto f(u(t), v(t))$ * en utilisant la formule ci-dessus,
* par un calcul direct.

PROPRIÉTÉ

Soit $f : \mathcal{D}_f = I \times J \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur le pavé ouvert \mathcal{D}_f .

On suppose que φ et ψ sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 définies sur un pavé ouvert \mathcal{D}' de \mathbf{R}^2 , et à valeurs respectivement dans I et dans J .

Alors $F : (x, y) \in \mathcal{D}' \mapsto f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{D}' , et on a :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x, y), \psi(x, y)) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \times \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x, y), \psi(x, y)) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x, y), \psi(x, y))$$

$$\text{Notation abrégée : } \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial \psi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \times \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \times \frac{\partial f}{\partial \psi}$$

Exercice 7 : On pose $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\varphi(x, y) = x \sin(y)$ et $\psi(x, y) = \ln(x + y)$.

Déterminer la dérivée de $F(x, y) = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ * en utilisant la formule ci-dessus,
* par un calcul direct.

5 Le gradient

DÉFINITION

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur le pavé ouvert \mathcal{D}_f . Soit $(x, y) \in \mathcal{D}_f$.

On appelle **gradient** de f en (x, y) le couple $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$.

Il s'agit donc d'un vecteur de \mathbf{R}^2 , noté $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y)$ ou $\nabla f(x, y)$.

Exercice 8 : Soit $f(x, y) = xe^{-y^2}$. Déterminer le gradient de f en $(1, 2)$.

6 Approximation d'une fonction de classe \mathcal{C}^1

PROPRIÉTÉ

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur le pavé ouvert \mathcal{D}_f . Alors pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, on a :

$$f(x + h, y + k) \underset{(h, k) \rightarrow (0, 0)}{=} f(x, y) + h \times \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + k \times \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + o(h, k)$$

où $o(h, k)$ désigne une fonction négligeable devant (h, k) , ie : telle que $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\|o(h, k)\|}{\|(h, k)\|} = 0$.

Remarque : C'est un développement limité à l'ordre 1 de la fonction f en (x, y) .

Écriture à l'aide du gradient : $f(x + h, y + k) \approx f(x, y) + \langle \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y), (h, k) \rangle + o(h, k)$

Exercice 9 : Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 + 2xy + 4$ définie sur \mathbf{R}^2 .

Montrer que : $f(1 + h, 2 + k) \underset{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}}{\approx} 9 + 7h + 2k$ * en utilisant la formule ci-dessus,
* par un calcul direct.

III Applications

1 Plan tangent à une surface

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , et soit $(x, y) \in I \times J$ tel que $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) \neq (0, 0)$.

Alors le plan tangent à Γ_f en $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$ est le plan passant par M et de vecteur normal $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 : Déterminer l'équation du plan tangent à la nappe représentative de la fonction f

définie par $f : (x, y) \mapsto \frac{2x}{1+y^2}$ au point $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ f(1, 1) \end{pmatrix}$

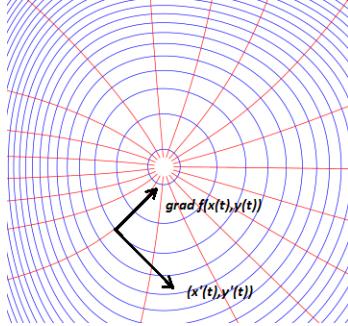
- * en utilisant un vecteur normal,
- * en utilisant l'approximation d'ordre 1 de f .

2 Courbes de niveau

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , et soit $z_0 \in \mathbf{R}$. On note $\Gamma_{z_0} = \{(x, y, z_0) \in \mathbf{R}^3, f(x, y) = z_0\}$ la courbe de niveau d'altitude z_0 de Γ_f .

On admet que, dans le plan horizontal d'équation $z = z_0$, la courbe de niveau Γ_{z_0} possède une équation paramétrique de la forme $(x(t), y(t))$ où $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont des fonctions dérivables.

Alors en tout point $M(x, y, z_0)$ de Γ_{z_0} , le vecteur $(x'(t), y'(t))$ est tangent à Γ_{z_0} , et le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f(x(t), y(t))$ est orthogonal à Γ_{z_0} .



3 Extréma locaux

Soit $f : \mathcal{D}_f = I \times J \rightarrow \mathbf{R}$ définie sur un pavé ouvert de \mathbf{R}^2 .

DÉFINITION

On dit que f admet en $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ un maximum (resp : minimum) **local** s'il existe un voisinage ouvert \mathcal{V} de (x_0, y_0) tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{D}_f, f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad (\text{resp : } f(x, y) \geq f(x_0, y_0)).$$

THÉORÈME

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}_f)$ et admet un extremum local en un point (x_0, y_0) intérieur à \mathcal{D}_f , alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Les dérivées partielles de f s'annulent donc en tout extremum local situé à l'intérieur de l'ensemble de définition de f . Autrement dit : $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) = \vec{0}$.

La réciproque est cependant fausse : il se peut que $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) = \vec{0}$ sans que f n'admette d'extremum local en (x_0, y_0) , et même si le point (x_0, y_0) est intérieur à \mathcal{D}_f .

DÉFINITION

Un point (x_0, y_0) en lequel $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) = \vec{0}$ est appelé un **point critique** de f .

Pour déterminer les éventuels extrema de f , on commence par rechercher les points critiques, qu'on étudie ensuite séparément.

Exercice 11 : Étudier les extréma locaux de $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 + y^2$.

4 Ajustement affine des moindres carrés

Soit (x, y) une série statistique bivariée : $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$.

Par exemple, les valeurs x_i, y_i sont issues d'une expérience dans laquelle on essaie de mettre en évidence une relation linéaire entre les grandeurs x_i et y_i . Soit $(M_i(x_i, y_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ le nuage de points associé à (x, y) . On cherche une droite $\mathcal{D} : y = ax + b$ passant "au plus près" de chacun des points du nuage, par la *méthode des moindres carrés* : c'est la droite pour laquelle la somme des carrés des distances entre les points du nuage et les points de \mathcal{D} de même abscisse est minimale.

PROPRIÉTÉ

Pour toute série statistique bivariée (x, y) , il existe une unique droite répondant au problème. Si $\mathbf{V}(x) = 0$, c'est une droite verticale. Sinon, cette droite dite *des moindres carrés* a pour équation réduite : $y = ax + b$, avec $a = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\mathbf{V}(x)}$, et elle passe par le point moyen du nuage, soit : $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

Cette droite réalise un ajustement linéaire (en réalité affine) de y selon x . On parle de *régression linéaire*.

Si le coefficient de corrélation linéaire r_{xy} est faible, on peut chercher une meilleure corrélation entre $f(x)$ et $g(y)$ où f, g sont des fonctions simples :

- * Ajustement exponentiel : $g(y) = \ln y$ conduit à : $\ln y = ax + b$ donc $y = \lambda e^{ax}$;
- * Ajustement logarithmique : $f(x) = \ln x$ conduit à : $y = a \ln x + b$;
- * Ajustement selon une puissance : $f(x) = \ln x$ et $g(y) = \ln y$ conduit à : $\ln y = a \ln x + b$ donc $y = \lambda x^a$.

IV Dérivées d'ordre supérieur

1 Définition

Lorsque c'est possible, on définit les dérivées partielles de f d'ordre supérieur par :

Dérivées d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Dérivées d'ordre 3 :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right), \quad \dots$$

Exercice 12 : Donner les dérivées partielles non nulles de la fonction $(x, y) \mapsto x^3 + 3xy + 5y^2$.

2 Fonctions de classe \mathcal{C}^k

DÉFINITION

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de deux variables, soit $k \in \mathbf{N}^*$.

On dit que f est de classe \mathcal{C}^k sur \mathcal{D}_f lorsque toutes les dérivées partielles de f d'ordre k existent et sont continues sur \mathcal{D}_f .

3 Théorème de Schwarz

THÉORÈME ** Théorème de Schwarz **

Si f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{D}_f , alors $\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$.

Si f est de classe \mathcal{C}^k sur \mathcal{D}_f , alors les dérivées partielles d'ordre k commutent.

4 Approximation d'ordre 2

THÉORÈME ** Approximation d'ordre 2 d'une fonction de classe \mathcal{C}^2 **

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , et soit $(x, y) \in \mathcal{D}_f$ un point intérieur à \mathcal{D}_f . Alors :

$$f(x + h, y + k) \underset{(h, k) \rightarrow (0, 0)}{=} f(x, y) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \right) + o\left(\|(h, k)\|^2\right).$$

Exercice 13 : Déterminer une approximation polynomiale au point $(0, 1)$ à l'ordre 2 de la fonction f définie sur \mathbf{R}^2 par : $f(x, y) = e^x(1 + y^2)$.

Préciser l'équation du plan tangent à la nappe représentative de f , et indiquer les positions relatives.