Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ est un espace probabilisé.
On étudie une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies sur Ω.
Ces variables aléatoires sont indifféremment finies, dénombrables, ou à densité.

I Inégalités usuelles

1 Inégalité de Markov

Proposition

Soit X une VAR positive ($X(\Omega) \subset \mathbf{R}_+$), et admettant une espérance $\mathbf{E}(X)$. Alors :

$$\forall a > 0,\ \mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}(X)}{a}$$

2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Proposition

Soit X une VAR admettant un moment d'ordre 2. Alors :

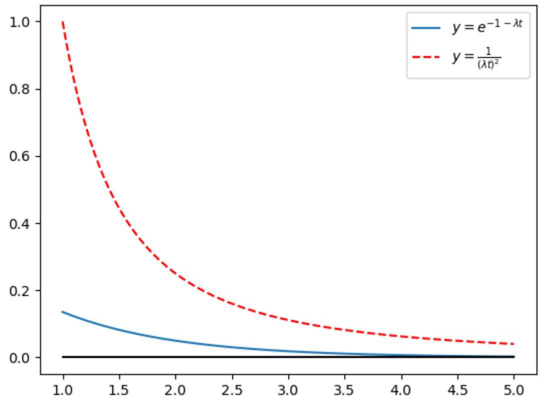
$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbf{P}\big(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Remarque : ce résultat équivaut à : $\mathbf{P}\big(|X - \mathbf{E}(X)| < \varepsilon\big) \geqslant 1 - \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}$

Exercice 1 : Soit X suivant une loi exponentielle : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Soit $\varepsilon > 0$.

1. on suppose ici que $\varepsilon \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$. Que penser dans ce cas de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

2. On suppose dans la suite que $\varepsilon > \dfrac{1}{\lambda}$.
   a) Calculer : $\mathbf{P}\big(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big)$.
   b) Le graphique ci-contre montre la représentation graphique des fonctions $f(t) = e^{-1-\lambda t}$ et $g(t) = \dfrac{1}{(\lambda t)^2}$ pour $\lambda = 1$. Que penser de la précision de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?



II Loi faible des grands nombres

1 Moyenne empirique

Définition

Soit $(X_n)_n \in \mathbf{N}^\star$ une suite de VAR. La suite des **moyennes empiriques** des X_n est la suite de VAR définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

Proposition

Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est une suite de VAR indépendantes, de même loi, admettant une espérance μ et une variance σ^2, alors : $\mathbf{E}(M_n) = \mu$ et $\mathbf{V}(M_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

2 Loi faible des grands nombres

Théorème

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ une suite de VAR indépendantes, de même loi, admettant une espérance μ et une variance σ^2. Alors la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ des moyennes empiriques vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\big(|M_n - \mu| > \varepsilon\big) = 0$$

Rq : on dit que la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ *converge en probabilité* vers une VAR certaine de valeur μ.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On jette n fois un dé, et on note A_n l'événement :
A_n : « au cours des n lancers, on a obtenu 6 moins d'une fois sur dix ».
Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour donner une majoration de $\mathbf{P}(A_n)$ lorsque :
$*\ n = 10 \qquad *\ n = 100 \qquad *\ n = 1\,000$

III Convergence en loi

1 Cas de VAR entières

DÉFINITION

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de VAR entières ($\forall n \in \mathbf{N},\ X_n(\Omega) \subset \mathbf{N}$), et soit X une VAR entière.
Alors on dit que $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **converge en loi** vers X si et seulement si :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(X = k)$$

PROPRIÉTÉ $\quad$ ** **Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson** **

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de VAR telle que : $\forall n \in \mathbf{N},\ X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} n \times p_n = \lambda \in \mathbf{R}$, alors $(X_n)_n$ converge en loi vers une VAR X telle que : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Usage : on admet communément que lorsque $n \geqslant 30$ et $p \leqslant 0,1$, on peut approximer la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$.

Exercice 3 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1000, \dfrac{1}{40}\right)$. Donner une estimation de : $\mathbf{P}(X = 25)$.

2 Cas général

DÉFINITION

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de VAR, et soit X une VAR.
On note F_{X_n} et F_X respectivement les fonctions de répartition de X_n et de X.
Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des points de discontinuité de F_X.
Alors on dit que $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **converge en loi** vers X si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \mathcal{D},\ \lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Rappel : $\overline{\mathbf{R}}$ désigne $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

PROPOSITION

Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi vers X, alors :

$$\forall a, b \in \overline{\mathbf{R}} \setminus \mathcal{D}\ (\text{avec } a < b),\ \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(a < X_n \leqslant b) = \mathbf{P}(a < X \leqslant b)$$

3 Théorème central-limite première forme

Rappels :
- Soit X une VAR admettant une variance non nulle. Alors on note $X^\star$ la VAR centrée réduite associée à X : $X^\star = \dfrac{X - \mathbf{E}(X)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)}}$.
- Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$$

THÉORÈME $\quad$ ** **TCL$_1$** **

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ une suite de VAR indépendantes, de même loi, admettant une espérance μ et une variance $\sigma^2 \neq 0$. Alors la suite $(M_n^\star)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une VAR suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\forall a, b \in \overline{\mathbf{R}}\ (\text{avec } a < b),\ \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(a < M_n^\star \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$$

Remarque : Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_n = n \times M_n$. Alors $S_n^\star = M_n^\star$ donc $(S_n^\star)_n$ converge aussi en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.

PROPRIÉTÉ $\quad$ ** **Approximation d'une loi binomiale par une loi normale** **

Soit $p \in]0,1[$ fixé, et soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ une suite de VAR telle que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
Alors $(X_n^\star)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\forall a, b \in \overline{\mathbf{R}}\ (\text{avec } a < b),\ \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(a < \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b\right) = \Phi(b) - \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$$

Usage : on admet communément que lorsque $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, on peut approximer la loi $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(np, npq)$.

Estimation de $\mathbf{P}(X_n = k)$ par correction de continuité

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on veut une approximation de : $\mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}\left(X_n^\star = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)$.

Prendre $a = b = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$ donnerait 0... On effectue alors une **correction de continuité** :

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}\left(k - \frac{1}{2} < X_n \leqslant k + \frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \begin{cases} a = \frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} \\ b = \frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} \end{cases}$$

Exercice 4 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1000, \dfrac{1}{40}\right)$.

1) Estimer la probabilité de l'événement : $[20 < X \leqslant 30]$.
2) Estimer la probabilité de l'événement : $[X = 25]$. Comparer avec le résultat de l'exercice 3.

IV Tests statistiques

1 Écart-type empirique

Définition

Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^\star}$ une suite de VAR. On définit pour tout $n \geqslant 1$ la **variance empirique** de $X_1, \ldots, X_n$ par :

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - M_n)^2$$

L'**écart-type empirique** de $X_1, \ldots, X_n$ est : $S_n = \sqrt{S_n^2}$.

2 Théorème central-limite seconde forme

Théorème ** **TCL$_2$** **

Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^\star}$ une suite de VAR indépendantes, de même loi, d'espérance μ et de variance $\sigma^2 \neq 0$. Alors la suite $\left(\dfrac{M_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

Usage : on se sert de cette deuxième forme lorsqu'on ne connaît pas l'écart-type commun des VAR X_n.

3 Test de conformité à la moyenne

Situation : on peut expérimentalement effectuer n mesures d'un phénomène, et on souhaite tester statistiquement l'hypothèse : « H_0 : la valeur moyenne du phénomène vaut μ_0 ».
La valeur de μ_0 peut être obtenue par calcul selon une modélisation mathématique, ou bien être issue d'une bibliographie... On l'appelle ici *moyenne théorique*.
On pose H_1 l'hypothèse alternative : « H_1 : la valeur moyenne du phénomène est différente de μ_0 ».
On souhaite prendre la décision : accepte-t-on H_0, ou bien doit-on la rejeter ?
On peut se tromper dans deux cas :

* on rejette H_0, alors qu'elle est vraie. C'est le risque de *première espèce*.
* on accepte H_0, alors qu'elle est fausse. C'est le risque de *seconde espèce*.

Même en multipliant les expériences, on ne pourra jamais être certain d'avoir pris la bonne décision.
On fixe le *risque d'erreur de première espèce*, noté α, égal à : $\alpha = \mathbf{P}_{[H_0 \text{ est vraie}]}(\text{on rejette } H_0)$.
On choisit la plupart du temps $\alpha = 0,05$ ou $0,01$ (risque d'erreur à 5% ou à 1%).
Le risque d'erreur de seconde espèce n'est pas étudié ici.

Définition

Soit X une VAR admettant une moyenne μ_0 et un écart-type $\sigma_0 \neq 0$. Soient $n \in \mathbf{N}^\star$ et $\alpha \in]0, 1[$.

* On appelle $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-**échantillon** de X tout vecteur de VAR indépendantes et suivant la même loi que X. Sa moyenne empirique est notée M_n.
* On appelle **marge d'erreur** au seuil $1 - \alpha$ le réel : $\varepsilon = \Phi^{-1}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right) \times \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$
  où S_n est l'écart-type empirique issu d'un n-échantillon de X.
* On appelle **intervalle de confiance** au seuil $1 - \alpha$ l'intervalle réel : $C_n = [M_n - \varepsilon, M_n + \varepsilon]$.

Proposition

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(\mu_0 \in C_n) = 1 - \alpha$$

Conduite du test :

1. on fixe arbitrairement $\alpha \in]0,1[$.
2. on détermine $u_\alpha = \Phi^{-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ grâce à une table de la loi normale.
3. On effectue n simulations de X et on calcule moyenne et écart-type empiriques M_n et S_n.
4. On explicite l'intervalle de confiance $C_n = \left[M_n - u_\alpha \times \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\ ,\ M_n + u_\alpha \times \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$.
5. On décide de rejeter H_0 si $\mu_0 \notin C_n$. Sinon, on conclut que le test ne permet pas de rejeter H_0 au seuil d'erreur α.

On a alors asymptotiquement (si n est grand) un risque d'erreur α.
En pratique, on admet la validité du test lorsque $n \geqslant 30$.

Exercice 5 : Une usine agro-alimentaire conditionne des barquettes de framboises de 250 grammes.
En pratique, les barquettes ne font bien sûr pas toutes exactement 250 g : cette valeur doit être comprise comme une masse moyenne. Un contrôle est effectué pour savoir si l'usine respecte cette moyenne de 250 g. On prélève au hasard $n = 100$ barquettes issues de cette usine, et on calcule la masse moyenne M_n et l'écart-type S_n de cet échantillon. On trouve : $M_n = 247$ g et $S_n = 5$ g.

Au risque d'erreur de 5%, peut-on considérer que l'usine respecte la moyenne de 250 g ?

4 Test de conformité sur une proportion

Situation : on connaît la moyenne théorique μ d'un phénomène, et on souhaite tester si des valeurs peuvent être issues de ce phénomène, en comparant la moyenne empirique M_n à la moyenne théorique μ.

Définition

Soit un phénomène apparaissant avec une fréquence μ dans une population.
Soit $\alpha \in]0,1[$. On appelle **intervalle de fluctuation** au seuil $1-\alpha$ l'intervalle réel :

$$F_n = \left[\mu - \frac{a}{\sqrt{n}}\ ,\ \mu + \frac{a}{\sqrt{n}}\right]$$

où $a = \Phi^{-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right) \times \sqrt{\mu(1-\mu)}$.

Définition simplifiée : pour $\alpha = 0,05$ et en majorant $\mu(1-\mu)$ par $\dfrac{1}{4}$, on obtient : $F_n \approx \left[\mu - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ,\ \mu + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Proposition

On choisit au hasard et indépendamment $n \geqslant 1$ éléments de cette population, et on note M_n la moyenne empirique obtenue. Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}\big(M_n \in F_n\big) = 1-\alpha$.

Conduite du test au risque d'erreur de 5% :

1. on pose $\alpha = 0,05$ (si autre choix, adapter les valeurs suivantes).
2. On explicite l'intervalle de fluctuation simplifié $F_n = \left[\mu - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ,\ \mu + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
3. On calcule M_n.
4. On décide que les valeurs ne sont pas issues du phénomène étudié (elles ne sont pas représentatives de ce phénomène) si $M_n \notin F_n$. Sinon, on conclut que le test ne permet pas d'exclure que ces valeurs soient issues du phénomène.

Comme précédemment, on convient que $n \geqslant 30$ est suffisant pour assurer la validité du test.

Exercice 6 : En 2024, on compte 51,5% de femmes en France. Une étude montre que parmi les 80 postes de direction (président ou directeur général) des entreprises du CAC40, on compte 5 femmes.

Peut-on affirmer au risque d'erreur de 5%, que les femmes sont bien représentées dans les directions des plus grandes entreprises françaises ?