Corrigé du DM5

Sous-espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ indéfiniment dérivables.

Soient $(\mathcal{E}) : y^{(3)} - 3y' + 2y = 0_E$ et S l'ensemble des fonctions de E vérifiant $(\mathcal{E})$.

1. S est un sous-espace vectoriel de E
   - par définition de S, on a : $S \subset E$.
   - la fonction nulle 0_E vérifie $(\mathcal{E})$ donc $0_E \in S$: S est non vide.
   - Soient $f, g \in S$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. On pose $h = \lambda f + \mu g$. Montrons que $h \in S$:

   Par linéarité de la dérivée, on a : $h' = \lambda f' + \mu g'$ et $h^{(3)} = \lambda f^{(3)} + \mu g^{(3)}$ donc :

   $$\begin{aligned} h^{(3)} - 3h' + 2h &= \lambda f^{(3)} + \mu g^{(3)} - 3(\lambda f' + \mu g') + 2(\lambda f + \mu g) \\ &= \lambda(f^{(3)} - 3f' + 2f) + \mu(g^{(3)} - 3g' + 2g) \\ &= \lambda \times 0_E + \mu \times 0_E = 0_E \quad \text{car } f, g \in S \end{aligned}$$

   donc $h \in S$. Conclusion : $\boxed{S \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

2. Une solution non nulle de $(\mathcal{E})$

   $\forall x \in \mathbf{R},\ f_0(x) = e^{-2x}$ donc $f_0'(x) = -2e^{-2x}$ et $f_0^{(3)}(x) = -8e^{-2x}$. On calcule :

   $f_0^{(3)}(x) - 3f_0'(x) + 2f_0(x) = -8e^{-2x} + 6e^{-2x} + 2e^{-2x} = 0$ donc $\boxed{f_0 \in S.}$

3. EDLH_2 vérifiée par une fonction auxiliaire

   a) $\forall x \in \mathbf{R},\ z(x) = y_0(x)e^{2x}$ donc :

   $$\begin{aligned} z'(x) &= y_0'(x)e^{2x} + 2y_0(x)e^{2x} \\ z''(x) &= y_0''(x)e^{2x} + 4y_0'(x)e^{2x} + 4y_0(x)e^{2x} \\ z^{(3)}(x) &= y_0^{(3)}(x)e^{2x} + 6y_0''(x)e^{2x} + 12y_0'(x)e^{2x} + 8y_0(x)e^{2x} \end{aligned}$$

   b) On calcule alors : $\forall x \in \mathbf{R},\ z^{(3)}(x) - 6z''(x) + 9z'(x)$

   $$= y_0^{(3)}(x)e^{2x} + 6y_0''(x)e^{2x} + 12y_0'(x)e^{2x} + 8y_0(x)e^{2x} - 6\big(y_0''(x)e^{2x} + 4y_0'(x)e^{2x} + 4y_0(x)e^{2x}\big) + 9\big(y_0'(x)e^{2x} + 2y_0(x)e^{2x}\big)$$

   $$= e^{2x}\left[y_0^{(3)} - 3y_0'(x) + 2y_0(x)\right] = 0 \qquad \text{car } y_0 \in S.$$

   Conclusion : $\boxed{z' \text{ vérifie l'équation } (\mathcal{E}') : y'' - 6y' + 9y = 0_E}$

4. S' est un sous-espace vectoriel de E

   L'équation caractéristique de $(\mathcal{E}')$ est : $r^2 - 6r + 9 = 0$, soit : $(r-3)^2 = 0$

   D'après le cours, $S' = \left\{x \longmapsto (Ax + B)e^{3x},\ (A, B) \in \mathbf{R}^2\right\}$

   On pose : $\forall x \in \mathbf{R},\ g_1(x) = xe^{3x}$ et $g_2(x) = e^{3x}$.

   On peut donc écrire : $S' = \left\{Ag_1 + Bg_2,\ (A, B) \in \mathbf{R}^2\right\} = \text{Vect}(g_1, g_2)$.

   $\boxed{S' \text{ est donc le sous-espace vectoriel de } E \text{ engendré par la famille } (g_1, g_2).}$

5. Trois fonctions suffisent à engendrer S

   a) $\displaystyle\int g_1 = \int xe^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{xe^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\,\mathrm{d}x$ par intégration par parties

   $\displaystyle\qquad = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C_1$ où C_1 est une constante.

   $\displaystyle\int g_2 = \int e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{3x}}{3} + C_2$ où C_2 est une constante.

   b) On a $z' \in S'$ donc $z' = Ag_1 + Bg_2$ pour des constantes A et B.

   En intégrant : $\displaystyle z(x) = A\left(\frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C_1\right) + B\left(\frac{e^{3x}}{3} + C_2\right)$

   $\boxed{z(x) = \nu xe^{3x} + \mu e^{3x} + \lambda}$ en posant $\nu = \dfrac{A}{3}$, $\mu = -\dfrac{A}{9} + \dfrac{B}{3}$ et $\lambda = AC_1 + BC_2$.

c) Pour tout réel x, on a : $y_0(x) = f_0(x)z(x) = e^{-2x}\left(\nu x e^{3x} + \mu e^{3x} + \lambda\right)$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ y_0(x) = \lambda e^{-2x} + \mu e^{x} + \nu x e^{x}}$ pour les constantes λ, μ, ν définies en **5b)**

On a montré, en définissant les fonctions f_1, f_2 comme à la question **6)**, que $\boxed{S \subset \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2)}$

6. <u>La famille (f_0, f_1, f_2) est libre</u>

   Soit $af_0 + bf_1 + cf_2 = 0_E$ une combinaison linéaire nulle de f_0, f_1, f_2.

   a) Pour $x = 0$, on obtient : $af_0(0) + bf_1(0) + cf_2(0) = 0$ donc $a + b = 0$.

   Pour $x = \ln 2$, on obtient : $af_0(\ln 2) + bf_1(\ln 2) + cf_2(\ln 2) = 0$ donc $\dfrac{a}{4} + 2b + 2c\ln 2 = 0$.

   Pour $x = -\ln 2$, on obtient : $af_0(-\ln 2) + bf_1(-\ln 2) + cf_2(-\ln 2) = 0$ donc $4a + \dfrac{b}{2} - \dfrac{c\ln 2}{2} = 0$.

   On résout le système obtenu sous forme matricielle :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2\ln 2 & 0 \\ 4 & \frac{1}{2} & -\frac{\ln 2}{2} & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow 4L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{7} & 8\ln 2 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{\ln 2}{2} & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{7} & 8\ln 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{7\ln 2} & 0 \end{array}\right)$$

   Ce système possède 3 pivots : il est carré de taille 3 et de rang 3 donc de Cramer.

   Il possède une unique solution. Puisqu'il est homogène, $(0,0,0)$ est solution.

   C'est donc la seule solution : $a = b = c = 0$.

   Ainsi, la seule combinaison linéaire nulle de f_0, f_1, f_2 est la combinaison linéaire triviale.

   Conclusion : $\boxed{\text{La famille } (f_0, f_1, f_2) \text{ est libre.}}$

   b) Pour $x \neq 0$, on a : $\dfrac{g(x)}{f_2(x)} = \dfrac{ae^{-3x}}{x} + \dfrac{b}{x} + c$ donc par opérations, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f_2(x)} = c$

   Mais $g = 0_E$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f_2(x)} = 0$. Par unicité de la limite : $c = 0$.

   De même, $\dfrac{g(x)}{f_0(x)} = a + be^{3x} + cxe^{3x}$. Par croissances comparées, $xe^{3x} \underset{-\infty}{\to} 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{f_0(x)} = a$.

   Mais $g = 0_E$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{f_0(x)} = 0$. Par unicité de la limite : $a = 0$.

   Il reste : $g(x) = bf_1(x) = be^x = 0$ pour tout réel x, donc $b = 0$.

   Conclusion : $a = b = c = 0$ et la famille (f_0, f_1, f_2) est libre.

7. <u>Base et dimension de S</u>

   On vérifie comme à la question **2)** que f_1 et f_2 vérifient $(\mathcal{E})$. On a donc $\mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2) \subset S$,

   et on a montré question **5)** l'inclusion réciproque, donc $\boxed{S = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2).}$

   (f_0, f_1, f_2) est génératrice de S, et est libre (question **6**).

   Conclusion : $\boxed{(f_0, f_1, f_2) \text{ est une base de } S, \text{ et } \dim(S) = 3.}$

   Remarque : on peut montrer que l'ensemble-solution d'une EDLH d'ordre n est un sous-espace vectoriel de E de dimension n.

8. <u>Coordonnées de y_T dans la base (f_0, f_1, f_2)</u>

   Soit $y \in S$ et $T \in \mathbf{R}$. On note $\mathcal{B}$ la base (f_0, f_1, f_2) de S.

   Soient (a, b, c) les coordonnées de y dans la base $\mathcal{B}$: $y = af_0 + bf_1 + cf_2$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \forall x \in \mathbf{R},\ y_T(x) &= y(x-T) = af_0(x-T) + bf_1(x-T) + cf_2(x-T) \\ &= ae^{-2(x-T)} + be^{x-T} + c(x-T)e^{x-T} \\ &= ae^{2T}e^{-2x} + be^{-T}e^{x} + ce^{-T}xe^{x} - cTe^{-T}e^{x} \\ &= ae^{2T}e^{-2x} + (b - cT)e^{-T}e^{x} + ce^{-T}xe^{x} \\ &= ae^{2T}f_0(x) + (b - cT)e^{-T}f_1(x) + ce^{-T}f_2(x) \end{aligned}$$

   ainsi, $y_T = ae^{2T}f_0 + (b - cT)e^{-T}f_1 + ce^{-T}f_2$ est une combinaison linéaire de f_0, f_1, f_2 :

   $\boxed{\forall T \in \mathbf{R},\ y_T \in S \text{ et les coordonnées de } y_T \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ sont } \left(ae^{2T},\ (b - cT)e^{-T},\ ce^{-T}\right)}$