1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Comme L_n est réalisé si et seulement si tous les lancers sont effectués avec ou bien la pièce A, ou bien avec la pièce B, on a $L_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k \cup \bigcap_{k=1}^{n} B_k$, et la réunion est incompatible, puisque qu'au lancer 1, on ne peut jouer avec les deux pièces. Ensuite par additivité finie : $P(L_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) + P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)$.

Enfin, d'après la formule des probabilités composées :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P\left(A_n \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right).$$

D'après la règle ii) du jeu, puisque l'on rejoue avec la même pièce si et seulement si on obtient `Pile`, on trouve que chaque facteur dans le produit ci-dessus, à part le premier peut-être, vaut a. Avec le même raisonnement pour les B_k, et le fait que $P(A_1) = P(B_1) = 1/2$ par la règle i), on trouve $P(L_n) = \dfrac{a^{n-1} + b^{n-1}}{2}$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

a) D'après la formule des probabilités totales avec le système quasi-complet d'évènements (A_n, B_n), on a :

$$a_{n+1} = P_{A_n}(A_{n+1})a_n + P_{B_n}(A_{n+1})(1 - a_n).$$

Sachant avec quelle pièce on joue au lancer n, la règle ii) nous dit que $P_{A_n}(A_{n+1}) = a$ et que $P_{B_n}(A_{n+1}) = 1 - b$, cela donne :

$$\forall n \geq 1 \quad a_{n+1} = (a + b - 1)a_n + (1 - b).$$

b) On reconnaît dans la relation de récurrence précédente celle d'une suite arithmético-géométrique. Soit C un réel vérifiant la relation $C = (a + b - 1)C + (1 - b)$. En retranchant cette dernière relation à la relation de récurrence, on obtient :

$$\forall n \geq 1 \quad (a_{n+1} - C) = (a + b - 1) \times (a_n - C)$$

ce qui prouve que la suite de terme général $a_n - C$ est géométrique de raison $(a + b - 1)$. Comme par $a_1 = 1/2$, et que $a + b \neq 2$, le réel $C = \dfrac{1 - b}{2 - (a + b)}$ convient et finalement :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star \quad a_n = C + (a + b - 1)^n \left(\frac{1}{2} - C\right).$$

3. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

a) Sachant que A_1 est observé, on observe E_n si et seulement si les $n - 1$ premiers lancers de la pièce A donnent `Pile` et le n-ème lancer de la pièce A donne `Face`. Comme les lancers de la pièce A peuvent être supposés mutuellement indépendants, (autrement dit, les A_k sont P_{A_1}-indépendants) :

$$P_{A_1}(E_n) = P_{A_1}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k \cap \overline{A_n}\right) = a^{n-1}(1 - a).$$

Par symétrie des rôles des pièces A et B, $P_{B_1}(E_n) = b^{n-1}(1 - b)$.

b) On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (A_1, B_1). Avec les résultats de la question précédente, on obtient :

$$P(E_n) = P_{A_1}(E_n)P(A_1) + P_{B_1}(E_n)P(B_1) = \frac{1}{2}\left((1 - a)a^{n-1} + (1 - b)b^{n-1}\right).$$

c) L'évènement : F : «obtenir au moins une fois face» est la réunion des évènements E_n pour $n \geq 1$. Comme ces évènements sont deux à deux incompatibles, par σ-additivité, on déduit que la série $\sum_{n\geq 1} P(E_n)$ converge et que sa somme vaut $P(F)$:

$$P(F) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left((1-a)a^{n-1} + (1-b)b^{n-1}\right).$$

Pour calculer $P(F)$, on remarque que le terme général de la somme est combinaison linéaire de termes généraux de séries géométriques de raisons a, b dans $]0,1[$ donc convergentes. D'où :

$$P(F) = \frac{1}{2}\left((1-a)\sum_{n=0}^{+\infty} a^n + (1-b)\sum_{n=0}^{+\infty} b^n\right) = 1.$$

d) Par définition, la famille $(E_n)_{n\geq 1}$ constitue un système quasi-complet d'évènements d'après les deux dernières questions.