Soit a, b étant deux réels dans $]0,1[$. On dispose de deux pièces A et B dont les probabilités de donner `Pile` sont respectivement a et b. On joue au jeu suivant :

i) On choisit une des deux pièces au hasard.

ii) On lance la pièce retenue. Ensuite :
- Si on obtient `Face` : on change de pièce.
- Si on obtient `Pile` : on conserve la pièce.

iii) On recommence l'étape ii) indéfiniment.

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit les évènements :
A_n : «on joue avec la pièce A au n-ème lancer». On note $a_n = P(A_n)$.
B_n : «on joue avec la pièce B au n-ème lancer».
F_n : «le n-ème lancer de pièce donne `Face`».
E_n : «on obtient `Face` pour la première fois au n-ème lancer».
L_n : «les n premiers lancers sont effectués avec la même pièce».

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Après avoir exprimé L_n à l'aide des évènements A_k et B_k, calculer la probabilité $P(L_n)$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

a) À l'aide de la formule des probabilités totales, établir une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

b) Déterminer, pour tout entier $n \geq 1$, l'expression de a_n en fonction de n.

3. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

a) Calculer les probablités $P_{A_1}(E_n)$ et $P_{B_1}(E_n)$.

b) En déduire la valeur $P(E_n)$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$.

c) Justifier que la série $\sum_{n\geq 1} P(E_n)$ converge et calculer sa somme.

d) Comment qualifier la famille d'évènements $(E_n)_{n\geq 1}$?