Diagonalisation

À rendre le lundi 12 janvier 2026

Soit $(a, b) \in [0, 1]^2$.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

1. **a)** Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible.

b) Calculer les valeurs propres de A.

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Écrire une fonction Python `puissanceA(a,b,n)` qui prend en entrée deux flottants `a`,`b`, un entier `n` et renvoie en sortie A^n sous forme de tableau `numpy`.*On pourra utiliser la fonction* `dot` *du module* `numpy`.

3. Dans cette question, on suppose que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a, b) \neq (1, 1)$.

a) Justifier qu'il existe une matrice carrée R inversible telle que $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a-b \end{pmatrix}$.

b) En déduire qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ telles que :

$$\begin{cases} A = P + (1-a-b)Q, \\ PQ = QP = 0 \\ P^2 = P \text{ et } Q^2 = Q. \end{cases}$$

c) Exprimer A^n en fonction de P, Q, a, b et n pour tout entier naturel n.

d) Que dire des coefficients de A^n quand $n \to +\infty$? En déduire que pour n assez grand A^n donne approximation de la matrice P.

e) Utiliser le résultat de la question précédente pour programmer une fonction `matPQ(a,b)` qui prend en entrée deux flottants `a`, `b` et renvoie une approximation des matrices P et Q. *On justifiera la valeur choisie du paramètre* `n`.

4. Dans cette question, on suppose que $(a, b) \neq (0, 0)$.
Pour tout entier naturel n, on considère l'équation (E_n) : $M^n = A$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

a) Soit M une solution de (E_n).

i) Montrer que $AM = MA$.

ii) En déduire que si X est un vecteur propre de A alors X est vecteur propre de M.
Que peut-on dire de la matrice $R^{-1}MR$?

b) Montrer que si $a + b \leqslant 1$ alors l'équation (E_n) admet toujours au moins une solution.

c) On pose $A = \begin{pmatrix} 5/8 & 1/8 \\ 3/8 & 7/8 \end{pmatrix}$.

i) Déterminer la matrice R qui diagonalise A et préciser R^{-1}.

ii) Résoudre les équations (E_3) et (E_2).