

**Programme de colles**  
**Semaine 14 du 12/01 au 16/01/2026**

### Diagonalisation des matrices

- Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres, spectre d'une matrice carrée
- Les valeurs propres d'une matrice diagonale ou triangulaire sont ses éléments diagonaux.
- Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- Une famille obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- Une matrice carrée d'ordre  $n$  admet au plus  $n$  valeurs propres distinctes et la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à  $n$ .
- Matrices semblables. Matrice diagonalisable : elle est semblable à une matrice diagonale.
- Cas des matrices triangulaires ou diagonales.
- Une matrice carrée d'ordre  $n$  est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à  $n$ .
- Une matrice carrée d'ordre  $n$  ayant  $n$  valeurs propres distinctes est diagonalisable et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.
- Une matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable, et n'a que des valeurs propres réelles.
- Application au calcul des puissances d'une matrice.
- Application à l'étude de suites imbriquées, de suites récurrentes linéaires.
- Application à la résolution de systèmes différentiels linéaires.
- Application à la résolution d'équations matricielles.

### Variables aléatoires réelles (VAR) discrètes

- Variable aléatoire réelle discrète sur  $(\Omega, \mathcal{T})$
- Loi de probabilité d'une VAR discrète
- Fonction de répartition : définition, croissance, limites en  $\pm\infty$
- Retrouver la loi de probabilité à partir de la fonction de répartition
- Moments d'une VAR discrète
- Espérance d'une VAR : définition, linéarité, croissance
- Théorème de transfert
- Variance d'une VAR discrète,  $\mathbf{V}(aX + b)$ ,  $\mathbf{V}(X) \geq 0$
- Formule de König-Huygens
- Écart-type, variable centrée, variable centrée réduite,  $X^*$  variable centrée réduite associée à  $X$
- Loi certaine, espérance, variance
- Loi uniforme, espérance de  $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$
- Loi de Bernoulli, espérance, variance
- Loi binomiale, espérance, variance
- Loi de Poisson, espérance, variance
- Loi géométrique, espérance, variance, propriété d'invariance temporelle

**Questions de cours :**

1. Définition d'une valeur propre ainsi que d'un sous-espace propre pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .
2. Que peut-on dire d'une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ?
3. Que peut-on dire de la juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes ?
4. Définition d'une matrice diagonalisable.
5. Condition sur les dimensions des sous-espaces propres pour qu'une matrice  $n \times n$  soit diagonalisable.
6. Condition suffisante de diagonalisabilité d'une matrice  $n \times n$  quant au nombre de ses valeurs propres.
7. Donner une condition d'inversibilité d'une matrice à l'aide de ses valeurs propres.
8. Donner deux conditions suffisantes (non nécessaires) de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle.
9. Formule des probabilités totales pour un système (quasi) complet d'événements lié à une VAR discrète
10. Définition de la loi de probabilité d'une VAR discrète
11. Définition du moment d'ordre  $r$  d'une VAR discrète
12. Définition de l'espérance d'une VAR discrète
13. Théorème de transfert
14. Définition de la variance et de l'écart-type d'une VAR discrète
15. Théorème de König-Huygens
16. Espérance, variance et écart-type de  $Y = aX + b$
17. Définition de la variable centrée réduite associée à une VAR discrète
18. Loi certaine, espérance et variance
19. Loi uniforme, espérance de la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$
20. Loi de Bernoulli, espérance et variance
21. Loi binomiale, espérance et variance
22. Loi de Poisson, espérance et variance
23. Loi géométrique, espérance et variance