Diagonalisation

À rendre le lundi 12 janvier 2026

DM7
Corrigé

1. **a)** Comme A est de taille 2×2, A est inversible si et seulement si son déterminant $(1-a)(1-b) - ab$ est non nul, c'est-à-dire si et seulement si $a + b \neq 1$.

b) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_2$ est non inversible. Comme précédemment on calcule le déterminant et il vient $\sigma(A) = \{1, 1-(a+b)\}$

c) Par positivité de a et b, $a + b = 0$ si et seulement si $a = b = 0$. Donc, si $(a, b) \neq 0$, A possède deux valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable, avec des sev propres de dimension 1. Sinon $A = I_2$ est diagonale. Donc A est diagonalisable pour tout couple (a, b) dans $[0, 1]^2$.

2. Fait en TP, s'y reporter.

3. **a)** Par définition de matrice diagonalisable, ce qui est le cas de A, et d'après **2.**, A est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a-b \end{pmatrix}$, ce qui prouve le résultat.

b) La méthode est *toujours la même* :

Résolution du problème diagonal. On peut remarquer que la matrice D définie dans la question précédente peut s'écrire d'après les règles du calcul matriciel :

$$D = 1 \cdot \Pi_1 + (1-a-b)\Pi_2 \quad \text{où} \quad \Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct donne $\Pi_1\Pi_2 = \Pi_2\Pi_1 = 0$, et $\Pi_1^2 = \Pi_1$, $\Pi_2^2 = \Pi_2$.

Résolution du problème initial On sandwiche toutes les relations précédentes par R et R^{-1}, la matrice R étant définie en **3.a)** :

$$\begin{aligned} RDR^{-1} &= R\Big(1 \cdot \Pi_1 + (1-a-b)\Pi_2\Big)R^{-1} \\ &= R\Pi_1R^{-1} + (1-a-b)R\Pi_2R^{-1} \quad \text{en développant.} \end{aligned}$$

On pose alors $P = R\Pi_1R^{-1}$, $Q = R\Pi_2R^{-1}$. Comme $RR^{-1} = R^{-1}R = I_2$, d'après les relations entre Π_1 et Π_2, on a bien $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ et $PQ = QP = 0$.

c) *Même méthode encore.* Comme $D^n = 1\Pi_1 + (1-a-b)^n\Pi_2$, en re-sandwichant par R et R^{-1}, on a :

$$A^n = RD^nR^{-1} = P + (1-a-b)^nQ.$$

d) Comme $|(1-a+b)| < 1$ les coefficients de $(1-a-b)^nQ$ tendent (géométriquement) vers 0 car ceux de Q sont des constantes indépendantes de n. Ainsi, pour n grand, la matrice A^n vaut environ P.

e) Si $0 < r < 1$, r^n décroît géométriquement vers 0, et ce, d'autant moins vite que r est proche de 1. En pratique, on peut fixer un seuil de $n = 10$, qu'on «pénalise» si $r = |1-a+b|$ est trop proche de 1, par exemple : $n = 10 + \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$, où $\varepsilon = 1 - r$. Ensuite, on remarque que $\Pi_1 + \Pi_2 = I_2$, donc en sandwichant par R et R^{-1} : $P + Q = I_2$, ce qui permet d'avoir facilement $Q = I_2 - P$ connaissant P :

```python
def matPQ(a,b):
    r = np.abs(1-(a+b))
    eps = 1-r
    n = 10 + int(1/eps)
    P = puissanceA(a,b,n)
    return P, np.eye(2)-P
```

4. **a)** **i)** Puisque $M^n = A$, et que M commute avec M^n, A commute bien avec M.

ii) Soit X un vecteur propre de A, alors $X \neq 0$, et $AX = \lambda X$, où $\lambda \in \sigma(A)$. Utilisons le fait que $AM = MA$, $AMX = MAX$. Or $AX = \lambda X$, donc $AMX = \lambda MX$. Ceci prouve que MX est dans le sev propre $\mathscr{E}_A(\lambda)$. Or $\mathscr{E}_A(\lambda) = \mathrm{Vect}(X)$, car il est de dimension 1 puisque $a + b \neq 0$. Donc MX est colinéaire à X : c'est la définition (puisque $X \neq 0$) de X est vecteur propre de M. On en déduit que $R^{-1}MR$ est aussi diagonale.

b) Comme dans la question **3. b)**, on considère l'équation $N^n = D$ où l'inconnue est une matrice carrée N, et D la matrice définie en **3. a)**. Un calcul classique fait en cours montre que :

$M^n = A \Leftrightarrow \begin{cases} N^n = D \\ N = R^{-1}MR \end{cases}$, et la question précédente montre que N est diagonale.

Une solution N évidente à ce système est $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-a-b)^{1/n} \end{pmatrix}$, matrice bien définie car $1 - a - b \geq 0$. D'après l'équivalence, $M = RNR^{-1}$ vérifie $M^n = A$.

c) **i)** Ici $a = \dfrac{3}{8}$ et $b = \dfrac{1}{8}$, on a bien $(a, b) \neq (0, 0)$, la matrice A possède deux sous-espaces propres de dimension 1 et est diagonalisable par **1. c)**. Ses valeurs propres sont 1 et 1/2. On cherche ensuite une matrice R comme en **3. a)**. Les équations matricielles $AX = \lambda X$ des sous-espaces propres de A sont des équations droite, tout vecteur directeur définit une base de chaque espace propre : $AX = X \Leftrightarrow (A - I_2)\,X = 0 \Leftrightarrow -3x + y = 0$. Posons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{E}_1(A) = \mathrm{vect}(X_1)$. De même : $AX = \dfrac{1}{2}X \Leftrightarrow \left(A - \dfrac{1}{2}I_2\right)X = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$, et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ constitue une base de $\mathscr{E}_{1/2}(A) = \mathrm{vect}(X_2)$. D'où une matrice R diagonalisant A : $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $R^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. avec les formules de Cramer.

ii) D'après **c.** et ses notations , $M^n = A \Leftrightarrow N^n = D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^n & 0 \\ 0 & y^n \end{pmatrix} = D \Leftrightarrow \begin{cases} x^n = 1 \\ y^n = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Les solutions N sont donc les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ où α est une racine n-ème (réelle) de 1 et β une racine n-ième réelle de 1/2. Finalement les matrices M cherchées sont les $M = R^{-1}NR$. si $n = 3$, la fonction cube est une bijection de $\mathbf{R}$ dans lui-même. Il y a donc une unique racine cubique à tout réel, et une seule matrice N solution, d'où une unique matrice M : $M = RNR^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 + \dfrac{3}{\sqrt[3]{2}} & 1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ 3\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) & 3 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{pmatrix}$.

Pour $n = 2$, les réels 1 et 1/2 ont chacun deux racines carrées : $\alpha = \pm 1$, $\beta = \pm\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, ce qui donne 4 couples (α, β) admissibles et 4 matrices N possibles. Pour ces couples, on calcule $M = RNR^{-1}$ et on conclut que les solutions de (E_2) sont les quatre matrices $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} \pm 1 + 3\dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}} & \pm 1 - \dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}} \\ \pm 3 - 3\dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}} & \pm 3 + \dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.