Corrigé du DS n°4

Exercice 1 : Codiagonalisation et système différentiel

1. Les première et troisième colonnes de A sont identiques donc $\underline{A \text{ n'est pas inversible}}$.
   On en déduit que $\boxed{0 \text{ est une valeur propre de } A.}$
2. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors λ est valeur propre de A si et seulement si $\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3$.
$$\mathrm{rg}\,(A-\lambda I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 4 & -3-\lambda & 4 \\ \boxed{1} & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - (2-\lambda)L_3}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda & -\lambda^2+3\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 4\lambda \\ \boxed{1} & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 4\lambda \\ \boxed{1} & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
   donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow 1-\lambda = 0$ ou $-\lambda^2 - \lambda = 0$. Conclusion : $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 0, 1\}.}$
   A possède bien trois valeurs propres distinctes, qu'on ordonne : $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 1$.
3. D'après le cours, A est diagonalisable et ses espaces propres sont de dimension 1.
4. $\underline{\text{Étude de } E_{-1}}$: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2y - 4z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2z \\ z = z \end{cases}$ donc $\boxed{E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

   $\underline{\text{Étude de } E_0}$: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = -x \end{cases}$ donc $\boxed{E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$.

   $\underline{\text{Étude de } E_1}$: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -2z = 0 \\ 4z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$ donc $\boxed{E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$.
5. Les vecteurs propres X_1, X_2, X_3 demandés sont ceux donnés à la question précédente.
   On a donc : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifient : $A = PDP^{-1}$.
6. Calcul de P^{-1} par inversion d'un système : soient a, b, c trois réels. Alors :
$$\begin{cases} y + z = a \\ 2x + z = b \\ x - y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = c \\ 2y + z = b - 2c \\ y + z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = c \\ y + z = a \\ -z = b - 2c - 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a + b - c \\ y = -a + b - 2c \\ z = 2a - b + 2c \end{cases}$$
   On peut alors lire les coefficients de P^{-1} : $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$.
7. On calcule BX_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$:

   $BX_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2X_1$ donc X_1 est vecteur propre de B associé à la valeur propre 2.

   $BX_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = X_2$ donc X_2 est vecteur propre de B associé à la valeur propre 1.

   $BX_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6X_3$ donc X_3 est vecteur propre de B associé à la valeur propre 6.

8. On en déduit que B possède les trois valeurs propres distinctes $1, 2$ et 6 donc B est diagonalisable. Les vecteurs propres X_1, X_2, X_3 forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ et la matrice de passage P diagonalise B : $\boxed{B = P\Delta P^{-1} \text{ avec } \Delta = \text{Diag}(2,1,6).}$

9. Avec les notations précédentes : $AB = \left(PDP^{-1}\right)\left(P\Delta P^{-1}\right) = PD\left(PP^{-1}\right)\Delta P^{-1} = PD\Delta P^{-1}$
Les matrices D et Δ sont diagonales, donc elles commutent : $D\Delta = \Delta D$.
On a alors : $AB = P\Delta DP^{-1} = \left(P\Delta P^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)$ donc $\boxed{AB = BA.}$

10. Soit $n \in \mathbf{N}$. On note $\mathcal{H}_n$ la propriété : $A^n = PD^nP^{-1}$. On montre par récurrence que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.
• Initialisation pour $n = 0$: $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$ donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
• Hérédité à partir de $n = 0$. Soit $n \geqslant 0$. On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie. Alors :
$A^{n+1} = A.A^n = \left(PDP^{-1}\right)\left(PD^nP^{-1}\right) = PD\left(P^{-1}P\right)D^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
• $\mathcal{H}_n$ est initialisée au rang $n = 0$ et héréditaire à partir du rang $n = 0$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ A^n = PD^nP^{-1}.}$

11. <u>Application</u> :
   (a) $\boxed{(S) \Leftrightarrow X'' = AX' + BX.}$
   (b) D'après les questions précédentes : $(S) \Leftrightarrow X'' = PDP^{-1}X' + P\Delta P^{-1}X$
   donc en multipliant à gauche par la matrice inversible P^{-1}, on obtient :
   $(S) \Leftrightarrow P^{-1}X'' = DP^{-1}X' + \Delta P^{-1}X \Leftrightarrow Y'' = DY' + \Delta Y$.
   (c) $Y'' = DY' + \Delta Y \Leftrightarrow \begin{cases} u'' = -u' + 2u \\ v'' = v \\ w'' = w' + 6w \end{cases}$
   On peut résoudre chacune de ces équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants :
   $u'' + u' - 2u = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$ de solutions réelles $r = -2$ et $r = 1$ donc $\boxed{\exists \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ \forall t \in \mathbf{R},\ u(t) = \alpha e^{-2t} + \beta e^t.}$
   $v'' - v = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ de solutions réelles $r = -1$ et $r = 1$
   donc $\boxed{\exists \gamma, \delta \in \mathbf{R},\ \forall t \in \mathbf{R},\ v(t) = \gamma e^{-t} + \delta e^t.}$
   $w'' - w' - 6w = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 - r - 6 = 0$ de solutions réelles $r = -2$ et $r = 3$ donc $\boxed{\exists \lambda, \mu \in \mathbf{R},\ \forall t \in \mathbf{R},\ w(t) = \lambda e^{-2t} + \mu e^{3t}.}$
   (d) On utilise enfin la relation $X = PY$ pour trouver les solutions de (S) :

$$\begin{cases} x = v + w \\ y = 2u + w \\ z = u - v \end{cases} \quad \text{donc} \quad \boxed{\forall t \in \mathbf{R},\ \begin{cases} x(t) = \gamma e^{-t} + \delta e^t + \lambda e^{-2t} + \mu e^{3t} \\ y(t) = (2\alpha + \lambda)e^{-2t} + 2\beta e^t + \mu e^{3t} \\ z(t) = \alpha e^{-2t} + (\beta - \delta)e^t - \gamma e^{-t} \end{cases} \quad \text{où } \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu \in \mathbf{R}.}$$

   Remarque : l'ensemble solution correspondant pour $t \longmapsto X(t)$ peut s'écrire :

$$\boxed{\text{Vect}\left(t \mapsto e^{-2t}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, t \mapsto e^t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, t \mapsto e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, t \mapsto e^t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, t \mapsto e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, t \mapsto e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)}$$

Exercice 2 : Longueurs de séries de lancers identiques

1. $\boxed{L_1(\Omega) = \mathbf{N}.}$

2. $[L_1 = 0]$ signifie qu'on obtient toujours le même côté de la pièce : ou bien uniquement des 'Face', ou bien uniquement des 'Pile'. Ainsi : $[L_1 = 0] = \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{F_n}\right)$

   Pour tout $k \geqslant 1$, $[L_1 = k]$ signifie qu'on a obtenu k fois le même côté lors des k premiers lancers, puis le côté opposé lors du $(k+1)^{\text{ème}}$ lancer :

   $\forall k \geqslant 1,\ [L_1 = k] = \left(\bigcap_{n=1}^{k} F_n \cap \overline{F_{k+1}}\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{k} \overline{F_n} \cap F_{k+1}\right)$

3. Soit $k \geqslant 1$. Par union disjointe, on a : $\mathbf{P}(L_1 = k) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{k} F_n \cap \overline{F_{k+1}}\right) + \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{k} \overline{F_n} \cap F_{k+1}\right)$

   Par indépendance des lancers successifs, on a :

   $\mathbf{P}(L_1 = k) = \prod_{n=1}^{k} \mathbf{P}(F_n) \times \mathbf{P}\left(\overline{F_{k+1}}\right) + \prod_{n=1}^{k} \mathbf{P}\left(\overline{F_n}\right) \times \mathbf{P}\left(F_{k+1}\right)$

   $\boxed{\forall k \in \mathbf{N}^\star,\ \mathbf{P}(L_1 = k) = q^k \times p + p^k \times q.}$

4. Les événement $[L_1 = k]$ sont deux-à-deux disjoints, donc par σ-additivité, la série $\sum \mathbf{P}(L_1 = k)$ converge. De plus, $\forall k \geqslant 1$, $\mathbf{P}(L_1 = k) = pq^k + qp^k = pq\left(q^{k-1}\right) + qp\left(p^{k-1}\right)$: on reconnaît les termes généraux de séries géométriques, de raisons p et q appartenant à $]-1, 1[$.

   On a donc : $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(L_1 = k) = pq \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} + qp \sum_{k=1}^{+\infty} p^{k-1} = pq \times \dfrac{1}{1-q} + qp \times \dfrac{1}{1-p} = q + p = 1.$

   L'événement $[L_1 = 0]$ est donc de probabilité nulle : c'est un événement <u>quasi-impossible</u>.

5. On étudie la convergence absolue de la série $\sum k \times \mathbf{P}(L_1 = k)$:

   $k \times \mathbf{P}(L_1 = k) = k \times (pq^k + qp^k) = q\left(k \times pq^{k-1}\right) + p\left(k \times qp^{k-1}\right)$: on reconnaît les termes généraux de séries géométriques dérivées, qui convergent absolument. Les sommes de ces séries sont les espérances de lois géométriques de paramètres p et q respectivement, donc :

   $\boxed{L_1 \text{ admet une espérance, égale à : } \mathbf{E}(L_1) = \dfrac{q}{p} + \dfrac{p}{q} = \dfrac{1-p}{p} + \dfrac{p}{1-p} = \dfrac{2p^2 - 2p + 1}{p - p^2}.}$

6. f est bien définie sur $]0, 1[$, dérivable par opérations, et de dérivée :

   $\forall x \in]0, 1[,\ f'(x) = \dfrac{(4x-2)(x - x^2) - (2x^2 - 2x + 1)(1 - 2x)}{(x - x^2)^2} = \dfrac{2x - 1}{(x - x^2)^2}$

   f' s'annule donc en $x = \frac{1}{2}$, et est strictement positive sur $]\frac{1}{2}, 1[$ et stritement négative sur $]0, \frac{1}{2}[$.

   $\boxed{f \text{ admet donc un minimum } m \text{ en } x = \tfrac{1}{2}, \text{ et } m = f(\tfrac{1}{2}) = 2.}$

   On a : $\mathbf{E}(L_1) = f(p)$ donc l'espérance de L_1 est minimale lorsque $p = \frac{1}{2}$ (pièce non truquée).

7. a) Moment d'ordre 2 : on étudie la convergence de la série $\sum k^2 \times \mathbf{P}(L_1 = k)$

   $k^2 \times \mathbf{P}(L_1 = k) = k^2(pq^k + qp^k) = q\left(k^2 \times pq^{k-1}\right) + p\left(k^2 \times qp^{k-1}\right)$: on reconnaît les termes généraux des séries des moments d'ordre 2 de lois géométriques de paramètres p et q, valant respectivement $\dfrac{q+1}{p^2}$ et $\dfrac{p+1}{q^2}$. Conclusion : $\boxed{L_1 \text{ possède un moment d'ordre 2 égal à : } m_2(L_1) = \dfrac{q(q+1)}{p^2} + \dfrac{p(p+1)}{q^2}.}$

   b) L_1 admet un moment d'ordre 2 donc une variance et d'après le théorème de König-Huygens :

   $\mathbf{V}(L_1) = m_2(L_1) - (\mathbf{E}(L_1))^2 = \dfrac{q(q+1)}{p^2} + \dfrac{p(p+1)}{q^2} - \left(\dfrac{q}{p} + \dfrac{p}{q}\right)^2 = \dfrac{q}{p^2} + \dfrac{p}{q^2} - 2$

   Conclusion : $\boxed{\text{la variance de } L_1 \text{ est : } \mathbf{V}(L_1) = \dfrac{q}{p^2} + \dfrac{p}{q^2} - 2.}$

8. Soient $k \geqslant 1$ et $i \geqslant 1$. L'événement $[L_1 = k] \cap [L_2 = i]$ est : "obtenir k fois le même côté de la pièce lors des k premiers lancers, puis i fois le côté opposé lors des lancers $(k+1)$ à $(k+i)$, puis le premier côté au $(k+i+1)^{\text{ème}}$ lancer. "
$$[L_1 = k] \cap [L_2 = i] = \left(\bigcap_{n=1}^{k} F_n \cap \bigcap_{n=k+1}^{k+i} \overline{F_n} \cap F_{k+i+1}\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{k} \overline{F_n} \cap \bigcap_{n=k+1}^{k+i} F_n \cap \overline{F_{k+i+1}}\right)$$
9. Par union disjointe et indépendance des lancers successifs, on a :
$$\mathbf{P}\big([L_1 = k] \cap [L_2 = i]\big) = \prod_{n=1}^{k} q \times \prod_{n=k+1}^{k+i} p \times q + \prod_{n=1}^{k} p \times \prod_{n=k+1}^{k+i} q \times p.$$
$$\boxed{\forall k, i \geqslant 1,\ \mathbf{P}\big([L_1 = k] \cap [L_2 = i]\big) = q^{k+1}p^i + p^{k+1}q^i.}$$
10. Soit $i \geqslant 1$. Les événements $\big([L_1 = k]\big)_{k \geqslant 1}$ forment un système quasi-complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(L_2 = i) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\big([L_1 = k] \cap [L_2 = i]\big)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^{k+1}p^i + p^{k+1}q^i\right)\\ &= p^i q^2 \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} + q^i p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} p^{k-1} \quad \text{en reconnaissant deux séries géométriques convergentes}\\ &= p^i q^2 \times \frac{1}{1-q} + q^i p^2 \times \frac{1}{1-p}\end{aligned}$$
Conclusion : $\boxed{\forall i \geqslant 1,\ \mathbf{P}(L_2 = i) = q^2 p^{i-1} + p^2 q^{i-1}.}$
11. $i \times \mathbf{P}(L_2 = i) = i\big(q^2 p^{i-1} + p^2 q^{i-1}\big) = q\big(iqp^{i-1}\big) + p\big(ipq^{i-1}\big)$ est une combinaison linéaire des termes généraux des séries des moments d'ordre 1 de lois géométriques de paramètres q et p donc $\sum i \times \mathbf{P}(L_2 = i)$ converge absolument et $\boxed{L_2 \text{ admet une espérance.}}$
$$\mathbf{E}(L_2) = q \sum_{i=1}^{+\infty} iqp^{i-1} + p \sum_{i=1}^{+\infty} ipq^{i-1} = q \times \frac{1}{q} + p \times \frac{1}{p} \qquad \text{Conclusion : } \boxed{\mathbf{E}(L_2) = 2.}$$