Devoir Maison n°8

Valeurs propres et variables aléatoires discrètes

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent toutes deux une même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, définies sur un même univers Ω.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$, c'est-à-dire l'application : $\Omega \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$

$$\omega \longmapsto \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer que : $\mathbf{P}(X = Y) = \dfrac{p}{2-p}$.
   (b) En déduire la probabilité pour que la matrice A soit inversible.

2. (a) Montrer que la matrice A possède deux valeurs propres distinctes, qu'on exprimera en fonction de X et Y.

   On note dans la suite M la plus grande valeur propre et m la plus petite valeur propre de A.
   On admet que M et m sont encore des variables aléatoires.
   (b) Justifier que M et m admettent une espérance et les calculer.
   (c) Écrire une fonction Python d'argument un flottant p qui renvoie une simulation de M et m.

3. Calculer les probabilités $\mathbf{P}(M = 2)$, $\mathbf{P}(m = 0)$ et $\mathbf{P}([M = 2] \cap [m = 0])$.
   Les variables M et m sont-elles indépendantes ?

4. (a) Déterminer $M(\Omega)$.
   (b) Soit $k \in M(\Omega)$. Exprimer l'événement $[M = k]$ comme une réunion d'événements liés aux variables X et Y.
   En déduire la probabilité $\mathbf{P}(M = k)$.
   (c) En utilisant la loi de M, montrer que M admet une espérance et retrouver la valeur de l'espérance de M calculée en **2b.**

5. (a) Justifier que $m(\Omega) = \mathbf{Z}$.
   (b) Soit $k \in \mathbf{N}$. À l'aide du système complet d'événements lié à la variable Y et de la formule des probabilités totales, déterminer $\mathbf{P}(m = k)$.
   (c) Soit k un entier strictement négatif et $n = -k$. Calculer $\mathbf{P}(m = k)$.
   (d) On admet que :
   m admet une espérance si, et seulement si, les deux séries $\sum\limits_{k<0} k \times \mathbf{P}(m = k)$ et $\sum\limits_{k>0} k \times \mathbf{P}(m = k)$ sont absolument convergentes
   et dans ce cas, $\mathbf{E}(m) = \sum\limits_{k=-1}^{-\infty} k \times \mathbf{P}(m = k) + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k \times \mathbf{P}(m = k)$.
   Montrer que m admet une espérance et retrouver la valeur de l'espérance de m calculée en **2b.**