DS n°4, mathématique

Durée : 2 heures
Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation.
L'usage des calculatrices est interdit. Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 : Codiagonalisation et système différentiel

On définit les matrices : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 10 \\ 8 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

1. Que dire des première et troisième colonnes de A ? En déduire une valeur propre de A.
2. Étudier le spectre de A, et montrer que A possède trois valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
3. A est-elle diagonalisable ? Justifier brièvement, et préciser la dimension des espaces propres de A.
4. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, étudier l'espace-propre E_{λ_i} associé à la valeur propre λ_i de A.
5. Soient X_1, X_2, X_3 les vecteurs propres de A tels que :
   - ⋆ $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $X_i \in E_{\lambda_i}$
   - ⋆ X_1 a son dernier coefficient égal à 1
   - ⋆ X_2 et X_3 ont leur premier coefficient égal à 1.

   Donner la matrice P obtenue en juxtaposant les matrice-colonnes X_1, X_2, X_3 et préciser la matrice diagonale D permettant de diagonaliser A à l'aide de la matrice P.
6. Calculer P^{-1}.
7. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, montrer que X_i est un vecteur propre de B, et préciser la valeur propre associée.
8. En déduire une matrice diagonale Δ telle que : $B = P\Delta P^{-1}$.
9. Montrer que les matrices A et B commutent (c'est-à-dire : $AB = BA$).
10. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.
11. <u>Application</u> :

    On considère le système différentiel $(S) : \begin{cases} x'' = 2x' - y' + 2z' + 11x - 5y + 10z \\ y'' = 4x' - 3y' + 4z' + 8x - 2y + 8z \\ z'' = x' - y' + z' - x + y \end{cases}$

    d'inconnues trois fonctions x, y, z définies et deux fois dérivables sur $\mathbf{R}$.

    Pour tout réel t, on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, et $Y(t) = P^{-1}X(t)$.

    On pose également $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ et $X''(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix}$ pour tout réel t

    et on admet que : $\forall t \in \mathbf{R},\ Y'(t) = P^{-1}X'(t)$ et $Y''(t) = P^{-1}X''(t)$.

    (a) Traduire le système (S) à l'aide d'une unique équation matricielle utilisant les matrices colonnes X, X', X'' et les matrices carrées A et B.

    (b) En déduire que : $(S) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbf{R},\ Y''(t) = DY'(t) + \Delta Y(t)$.

    (c) On note $u(t), v(t), w(t)$ les coefficients de $Y(t)$: $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$.

    Déterminer les fonctions u, v, w.

    (d) En déduire les solutions générales du système différentiel (S).

Exercice 2 : Longueurs de séries de lancers identiques

On considère une pièce truquée dont la probabilité de donner 'Pile' est notée $p \in]0,1[$.
On pose $q = 1 - p$ la probabilité de donner 'Face'.

On effectue avec cette pièce une succession infinie de lancers indépendants, et pour tout entier $n \geqslant 1$, on note F_n l'événement : "on obtient 'Face' au $n^{\text{ème}}$ lancer ".

On s'intéresse dans cet exercice aux longueurs de séries de lancers identiques. On note L_1 la variable aléatoire égale au nombre de lancers consécutifs identiques à partir du premier lancer, et on convient que L_1 prend la valeur 0 si tous les lancers sont identiques.

Par exemple, si les événements $F_1, F_2, F_3, \overline{F_4}$ sont réalisés, alors l'événement $[L_1 = 3]$ est réalisé car les trois premiers lancers sont identiques mais le quatrième est différent.

1. Donner l'univers-image de L_1.
2. Pour tout $k \in L_1(\Omega)$, exprimer l'événement $[L_1 = k]$ à l'aide des événements F_n $(n \geqslant 1)$.
   On distinguera $k \geqslant 1$ et $k = 0$.
3. En déduire que : $\forall k \in \mathbf{N}^\star,\ \mathbf{P}(L_1 = k) = pq^k + qp^k$.
4. Expliquer pourquoi $\sum \mathbf{P}(L_1 = k)$ est une série convergente et calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(L_1 = k)$.
   Que dire alors de l'événement $[L_1 = 0]$?
5. Montrer que L_1 admet une espérance, et exprimer $\mathbf{E}(L_1)$ en fonction de p.
6. Pour $x \in]0,1[$, on pose : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x + 1}{x - x^2}$.
   Montrer que f admet un minimum sur $]0,1[$, et préciser la valeur de ce minimum ainsi que la valeur de x en lequel il est atteint.
   Interpréter quant à l'espérance de L_1.
7. a) Montrer que L_1 possède un moment d'ordre 2 égal à : $m_2(L_1) = \dfrac{q(q+1)}{p^2} + \dfrac{p(p+1)}{q^2}$.
   b) En déduire que la variance de L_1 est : $\mathbf{V}(L_1) = \dfrac{q}{p^2} + \dfrac{p}{q^2} - 2$.

On note L_2 la longueur de la deuxième série de lancers identiques.

Par exemple si les événements $F_1, F_2, \overline{F_3}, \overline{F_4}, \overline{F_5}, F_6$ sont réalisés, alors l'événement $[L_2 = 3]$ est réalisé (ainsi que l'événement $[L_1 = 2]$) car après une série de 'Face' (de longueur 2), on a obtenu une série de 'Pile' de longueur 3.

8. Pour $k \geqslant 1$ et $i \geqslant 1$, exprimer l'événement $[L_1 = k] \cap [L_2 = i]$ à l'aide des événements F_n.
9. En déduire la probabilité de l'événement : $[L_1 = k] \cap [L_2 = i]$.
10. Déterminer la loi de L_2.
    On utilisera un système quasi-complet d'événements lié à la variable aléatoire L_1.
11. Montrer que L_2 admet une espérance, et que $\mathbf{E}(L_2) = 2$.

* * * Fin du sujet * * *