Variables aléatoires à densité

À rendre le lundi 9 février 2026

1. Soit U une variable aléatoire à densité de loi uniforme sur $]0;1[$ et α un réel strictement positif. Déterminer la loi de la variable $-\dfrac{1}{\alpha}\ln U$.

2. Soit λ, μ deux réels strictement positifs, et X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé de lois respectives $\mathscr{E}(\lambda)$ et $\mathscr{E}(\mu)$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

- **a)** Écrire le script d'une fonction python permettant de simuler la variable $T = \min(X, Y)$.
- **b)** Calculer la loi de T.

3.
- **a)** Calculer la loi de la variable $-Y$. Donner l'allure d' une densité de $-Y$ ainsi que sa fonction de répartition (on ne demande pas de script python).
- **b)** On rappelle que si Z et Z' sont deux variables aléatoires à densité définies sur un même espace probabilisé, et indépendantes, de densités respectives f_Z et $f_{Z'}$, alors $Z + Z'$ est une variable aléatoire à densité et de densité la fonction f donnée par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t) f_{Z'}(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

  Calculer la loi de $X - Y$.
- **c)** Calculer ensuite la probabilité de l'évènement $[X - Y \leq 0]$.

4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un même espace probabilisé, et telles que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad X_{2n} \rightsquigarrow \mathscr{E}(1) \qquad \text{et} \qquad X_{2n+1} \rightsquigarrow \mathscr{E}(2)\,.$$

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On dit que la variable X_n réalise un *point creux* de la suite si les évènements $[X_n - X_{n-1} \leq 0]$ et $[X_n - X_{n+1} \leq 0]$ sont réalisés simultanément, et on note C_n cet évènement.

- **a)** Écrire le script python d'une fonction prenant en entrée un entier `n` et renvoyant en sortie `True` si X_n réalise un point creux de la suite (X_n), et renvoyant `False` sinon.
- **b)** Estimer informatiquement les probabilités des évènements C_{2n} et C_{2n+1}.
- **c)** Calculer les probabilités de ces évènements.

5.
- **a)** Soit $n \geq 1$. Calculer la probabilité que X_n et X_{n+1} réalisent simultanément des points creux.
- **b)** Étudier de manière générale pour $m, n > 0$ l'indépendance de deux évènements C_m et C_n.