

# Corrigé du DM n°8

## Valeurs propres et variables aléatoires discrètes

1. (a) À l'aide du système complet d'événements  $([X = k])_{k \in \mathbf{N}^*}$ , la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k] \cap [Y = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \times \mathbf{P}(Y = k) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y.$$

Comme  $X$  et  $Y$  suivent la loi géométrique de paramètre  $p$ , on a :

$$\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( (1-p)^{k-1} p \right)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( (1-p)^2 \right)^{k-1} p^2.$$

On reconnaît la somme d'une série géométrique de raison  $(1-p)^2 \in ]0, 1[$

$$\text{donc } \mathbf{P}(X = Y) = \frac{p^2}{1 - (1-p)^2} = \frac{p^2}{2p - p^2}. \quad \text{Conclusion : } \boxed{\mathbf{P}(X = Y) = \frac{p}{2-p}}.$$

- (b) Comme  $A$  est une matrice carrée d'ordre 2,  $A$  est inversible  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ .

Notons  $\mathcal{I}$  l'événement «  $A$  est inversible ».

Comme  $\det A = X^2 - Y^2$ ,  $\mathcal{I} = [X^2 - Y^2 \neq 0] = [X \neq Y]$  car  $X$  et  $Y$  sont positives.

On en déduit que  $\mathbf{P}(\mathcal{I}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{\mathcal{I}}) = 1 - \mathbf{P}(X = Y) = 1 - \frac{p}{2-p}$ .

Finalement,  $\boxed{\text{la probabilité que la matrice } A \text{ soit inversible est égale à } \mathbf{P}(\mathcal{I}) = \frac{2(1-p)}{2-p}}.$

2. (a) Soit  $\lambda \in \mathbf{R}$ .  $\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_2$  n'est pas inversible  $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0$ .

$$\text{Or } \det(A - \lambda I_2) = (X - \lambda)^2 - Y^2 = (X + Y - \lambda)(X - Y - \lambda).$$

On en déduit que  $\boxed{\text{les valeurs propres de } A \text{ sont } X + Y \text{ et } X - Y}.$

$X + Y = X - Y \Leftrightarrow Y = 0$  ce qui est impossible car  $Y(\Omega) = \mathbf{N}^*$  donc  $\boxed{A \text{ possède 2 valeurs propres distinctes}}.$

On pose :  $\boxed{M = X + Y \text{ et } m = X - Y}.$

- (b) Comme  $X$  et  $Y$  admettent une espérance,  $M$  et  $m$  admettent une espérance et, par linéarité de l'espérance,  $\mathbf{E}(M) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$  et  $\mathbf{E}(m) = \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(Y)$ .

$$\text{Comme } \mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = \frac{1}{p}, \quad \boxed{\mathbf{E}(M) = \frac{2}{p} \text{ et } \mathbf{E}(m) = 0}.$$

- (c) On simule les variables  $X$  et  $Y$  et on renvoie  $M = X + Y$  et  $m = X - Y$  :

```
import random as rd
def geom(p) :
    rang = 1
    while rd.random() > p :
        rang += 1
    return rang

def vap(p) :
    X, Y = geom(p), geom(p)
    return X+Y, X-Y
```

3. Comme  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbf{N}^*$ ,  $[M = 2] = [X = 1] \cap [Y = 1]$ .

Par indépendance des événements  $[X = 1]$  et  $[Y = 1]$ ,  $\mathbf{P}(M = 2) = \mathbf{P}(X = 1) \times \mathbf{P}(Y = 1)$ .

Comme  $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(Y = 1) = p$ ,  $\boxed{\mathbf{P}(M = 2) = p^2}.$

Comme  $[m = 0] = [X - Y = 0] = \overline{\mathcal{I}}$ ,  $\boxed{\mathbf{P}(m = 0) = \frac{p}{2-p}}$  d'après 1.

Comme  $[M = 2] \cap [m = 0] = [X = 1] \cap [Y = 1]$ ,  $\boxed{\mathbf{P}([M = 2] \cap [m = 0]) = p^2}.$

Comme  $p \neq 1$ ,  $\frac{p}{2-p} \neq 1$  et donc  $\mathbf{P}([M = 2] \cap [m = 0]) \neq \mathbf{P}(M = 2) \times \mathbf{P}(m = 0)$ .

On en conclut que  $\boxed{\text{les variables } M \text{ et } m \text{ ne sont pas indépendantes}}.$

4. (a) Comme  $M = X + Y$  et  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbf{N}^*$ ,  $M(\Omega) = \{k \in \mathbf{N}, k \geq 2\}$ .

(b) Soit  $k \geq 2$ .  $[M = k] = [X + Y = k] = \bigcup_{i=1}^{+\infty} ([X = i] \cap [Y = k - i])$ .

Or  $[Y = k - i] = \emptyset$  si  $k - i < 1$  donc  $\forall k \geq 2, [M = k] = \bigcup_{i=1}^{k-1} ([X = i] \cap [Y = k - i])$ .

Comme les événements  $[X = i] \cap [Y = k - i]$ ,  $i \in \{1, \dots, k - 1\}$  sont incompatibles,

$$\mathbf{P}(M = k) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = k - i]).$$

Puis par indépendance des variables  $X$  et  $Y$ ,  $\mathbf{P}(M = k) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}(X = i) \times \mathbf{P}(Y = k - i)$ .

$$\text{On en déduit que } \mathbf{P}(M = k) = \sum_{i=1}^{k-1} (1-p)^{i-1} p (1-p)^{k-i-1} p = \sum_{i=1}^{k-1} (1-p)^{k-2} p^2.$$

Finalement,  $\forall k \geq 2, \mathbf{P}(M = k) = (k-1)(1-p)^{k-2} p^2$ .

(c) Pour tout  $k \geq 2$ ,  $|k \mathbf{P}(M = k)| = k(k-1)(1-p)^{k-2} p^2$ . On reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée seconde de raison  $1-p \in ]0, 1[$  donc convergente.

Ainsi,  $M$  admet une espérance et :

$$\mathbf{E}(M) = \sum_{k=2}^{+\infty} k \mathbf{P}(M = k) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} p^2 = \frac{2p^2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2p^2}{p^3}.$$

On retrouve bien  $\mathbf{E}(M) = \frac{2}{p}$ .

5. (a) Comme  $m = X - Y$  et  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbf{N}^*$ ,  $m(\Omega) = \mathbf{Z}$ .

(b) Soit  $k \in \mathbf{N}$ . La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $([Y = i])_{i \in \mathbf{N}^*}$

$$\text{donne : } \mathbf{P}(m = k) = \mathbf{P}(X - Y = k) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = i + k] \cap [Y = i]).$$

Par indépendance des variables  $X$  et  $Y$ ,  $\mathbf{P}(m = k) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = i + k) \mathbf{P}(Y = i)$ .

$k \geq 0$  donc  $i + k \geq 1$ , et on utilise la loi de  $X$  et  $Y$  :

$$\mathbf{P}(m = k) = \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{i+k-1} p (1-p)^{i-1} p = (1-p)^k p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^{i-1} = \frac{(1-p)^k p^2}{1-(1-p)^2}.$$

$$\text{D'où } \forall k \in \mathbf{N}, \mathbf{P}(m = k) = \frac{p}{2-p} (1-p)^k.$$

(c) Soit  $k$  un entier strictement négatif alors  $n = -k \in \mathbf{N}^*$ .

$\mathbf{P}(m = k) = \mathbf{P}(X - Y = -n) = \mathbf{P}(Y - X = n)$ . Comme  $X$  et  $Y$  ont même loi, on peut utiliser

$$\text{le résultat précédent et } \mathbf{P}(Y - X = n) = \frac{p}{2-p} (1-p)^n.$$

$$\text{On en déduit que : } \forall k < 0, \mathbf{P}(m = k) = \frac{p}{2-p} (1-p)^{-k}.$$

(d) Pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ ,  $|k \mathbf{P}(m = k)| = \frac{p(1-p)}{2-p} k (1-p)^{k-1}$ .

$$\text{Pour tout } k < 0, \text{ en posant } n = -k, |k \mathbf{P}(m = k)| = \frac{p(1-p)}{2-p} n (1-p)^{n-1}.$$

Dans les deux cas, on reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée de raison  $1-p \in ]0, 1[$  donc convergente.

Ainsi,  $m$  admet une espérance et  $\mathbf{E}(m) = \sum_{k=-1}^{-\infty} k \mathbf{P}(m = k) + \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbf{P}(m = k)$ .

En posant  $n = -k$  on a :  $\sum_{k=-1}^{-\infty} k \mathbf{P}(m = k) = - \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbf{P}(m = -n) = - \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{p}{2-p} (1-p)^n$  d'après **5c**.

Comme  $\sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbf{P}(m = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{p}{2-p} (1-p)^k$  d'après **5b.**, on retrouve bien  $\mathbf{E}(m) = 0$ .