

Programme de colles
Semaine 18 du 9/02 au 13/02/2026

Variables aléatoires réelles (VAR) à densité

- Densité de probabilité : f positive sur $\mathbf{R}$, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points, telle que $\int_{\mathbf{R}} f$ converge et vaut 1.
- Variable aléatoire réelle à densité.
- Si f est une densité de probabilité, alors il existe une VAR à densité X dont f est une densité.
- Fonction de répartition d'une VAR de densité $f_X : \forall x \in \mathbf{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$
- Si I est un intervalle, expression de $\mathbf{P}(X \in I)$ à l'aide d'une intégrale portant sur f_X .
- Caractérisation d'une VAR à densité à l'aide de sa fonction de répartition F_X :
 X admet une densité ssi F_X est continue sur $\mathbf{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Dans ce cas, la fonction f obtenue en posant $f(t) = F'_X(t)$ lorsque c'est possible, et $f(t) = 0$ sinon est une densité de X .
- Exemples simples de composées d'une VAR à densité X par une fonction $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$:
 - * on admet que $Y = g(X)$ est une VAR.
 - * Y est une VAR discrète ssi $Y(\Omega)$ est fini ou dénombrable,
 - * Y admet une densité ssi F_Y vérifie la caractérisation précédente.
- Moments d'une VAR à densité. Espérance $\mathbf{E}(X)$, variance $\mathbf{V}(X)$ (écart-type $\sigma(X)$).
- Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance.
- Théorème de transfert.
- Variance de $aX + b$.
- Théorème de König-Huygens.
- VAR centrée, réduite. Si X est une VAR admettant une variance non nulle, alors $X^* = \frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$ est la VAR centrée réduite associée à X .
- Loi uniforme sur $[a, b] : \mathcal{U}([a, b])$, densité, fonction de répartition, espérance, variance.
- Loi exponentielle : $\mathcal{E}(\lambda)$, densité, fonction de répartition, espérance, variance.
- Loi normale (ou gaussienne) centrée réduite : $\mathcal{N}(0, 1)$, densité notée φ , espérance, variance.
- Loi normale de paramètres $\mu, \sigma^2 : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, densité, espérance, variance.
- Si X suit une loi normale, alors $\forall a, b (a \neq 0), aX + b$ suit une loi normale.
 En particulier, X^* suit une loi normale centrée réduite.

Applications linéaires

- Application linéaire, endomorphisme, isomorphisme. Espaces isomorphes.
- Notation $\mathcal{L}(E, F)$ ou $\mathcal{L}(E)$.
- Opérations sur les applications linéaires : addition, multiplication par un scalaire, composition, réciproque. Propriétés de ces opérations.
- pour $f \in \mathcal{L}(E)$, notation f^n ($n \geq 0$) pour désigner la composée de f par elle-même n fois.
- Noyau, lien avec l'injectivité. $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ.
- Image, lien avec la surjectivité. $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée.
- En dimension finie :
 - * Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.
 - * Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base.
 - * Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbf{K}^n$.
 - * Rang d'une application linéaire.
 - * Théorème du rang.
 - * Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension, il y a équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.

- * Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases.
- * Matrice de la somme de deux applications linéaires, du produit par un scalaire, de la composée de deux applications linéaires, de l'isomorphisme réciproque.
- * Un endomorphisme est bijectif si, et seulement si, sa matrice, dans une base quelconque, est inversible. Il suffit de disposer d'une matrice inverse à gauche ou à droite.
- * Application linéaire de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ canoniquement associée à une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
- * Matrice de passage.
- * Action d'un changement de base sur la matrice des coordonnées d'un vecteur.
- * Action d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.
- * Matrices semblables.
- Diagonalisation :
 - * Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres, spectre d'un endomorphisme.
 - * En dimension finie, lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et ceux d'une matrice qui le représente dans une base.
 - * Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
 - * Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
 - * En dimension finie, endomorphisme diagonalisable (matrice diagonalisable).
 - * Un endomorphisme en dimension n (une matrice carrée d'ordre n) est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n .
 - * Un endomorphisme en dimension n (une matrice carrée d'ordre n) ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable. Les sous-espaces propres sont alors de dimension 1.

Questions de cours :

1. Donner la définition d'une densité de probabilité.
2. À quelles conditions sur sa fonction de répartition une VAR X admet-elle une densité ?
Comment dans ce cas définir une densité de X ?
3. Donner une condition pour qu'une VAR X de densité f admette un moment d'ordre r et le définir.
4. Donner une condition pour qu'une VAR X de densité f admette une espérance et la définir.
5. Donner une condition pour qu'une VAR X de densité f admette une variance et la définir.
6. Donner espérance et variance de $Y = aX + b$ en précisant les conditions.
7. Citer le théorème de transfert.
8. Définir la variable centrée réduite associée à une VAR X en précisant les conditions.
9. Densité, fonction de répartition, espérance et variance de la loi uniforme sur $[a, b]$.
10. Densité, fonction de répartition, espérance et variance de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
11. Densité, fonction de répartition, espérance et variance d'une loi normale de paramètres μ, σ^2 .
12. Allure de la représentation graphique d'une densité de la loi exponentielle de paramètre 1.
13. Allure de la représentation graphique d'une densité de la loi normale d'espérance 1 et de variance 1.
14. Définitions de l'image et du noyau d'une application linéaire de E vers F .
15. Théorème du rang pour une application linéaire f de E vers F .
16. Caractériser les applications linéaires de E vers F injectives, surjectives, bijectives.
17. Écriture matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire en dimension finie.
18. Définition du rang d'une application linéaire de E vers F .
19. Formule de changement de base pour la matrice d'un endomorphisme de E de dimension finie.
20. Définition de matrices semblables.
21. Définition de valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme.
22. Que peut-on dire d'une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ?
23. Que peut-on dire de la juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes ?
24. Définition d'un endomorphisme diagonalisable.
25. Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie.
26. Condition suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie.