1. Fait en cours et en TD : on calcule la fonction de répartition de $X = -\dfrac{1}{\alpha}\ln U$ et on reconnaît celle d'une loi exponentielle de paramètre α. Comme deux variables aléatoires ayant même fonction de répartition ont même loi, X suit aussi une loi exponentielle de paramètre α.

2. **a)** On crée d'abord une fonction simulant une varible de loi exponentielle en utilisant le résultat de **1.** :

```python
def expo(a):
    U = rd.random()
    return -1/a*np.log(U)

def minXY(a,b):
    X,Y = expo(a),expo(b)
    return min(X,Y)
```

b) On calcule la fonction de répartition F_T de la variable T. Soit $t \in \mathbf{R}$. Par définition de T, puis de celle de minimum, on a la chaîne d'égalités suivante :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad [T > t] = \min(X,Y) > t = [X > t] \cap [Y > t]. \tag{1}$$

Il vient, en passant aux probabilités, et par indépendance des variables X et Y :

$$\begin{array}{rcl} P(T > t) & = & P([X > t]) \times P([Y > t]) \\ & = & (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t)). \end{array}$$

Comme $P(T > t) = 1 - F_T(t)$, on obtient finalement :

$$F_T(t) = \left| \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & t < 0 \\ 1 - e^{-(\lambda+\mu)t} & \text{si} & t \geq 0. \end{array} \right. \tag{2}$$

Ce dernier résultat permet de dire avec le même argument qu'en **1** que T suit une loi exponentielle de paramètre $\alpha = \lambda + \mu$.

3. **a)** **Espace image de $-Y$.** Puisque les valeurs de Y sont prises quasi-certainement sur $\mathbf{R}_+$, celles de $-Y$ le sont sur $\mathbf{R}_-$.

Calcul de $F_{-y}(t)$. Soit F_{-Y} la fonction de répartition de $-Y$. On a donc :

Si $t > 0$:

$$\forall t > 0 \quad F_{-Y}(y) = 1. \tag{3}$$

Si $t \leq 0$: $[-Y \leq t] = [Y \geq -t] = \overline{[Y < -t]}$. En passant aux probabilités, et utilisant que Y est à densité :

$$\forall t \leq 0 \quad F_{-Y}(t) = 1 - F_Y(-t).$$

Comme $-t \geq 0$, et comme Y suit la loi exponentielle de paramètre μ, on peut remplacer $F_Y(-t)$ par $(1 - e^{\mu t})$, ce qui donne :

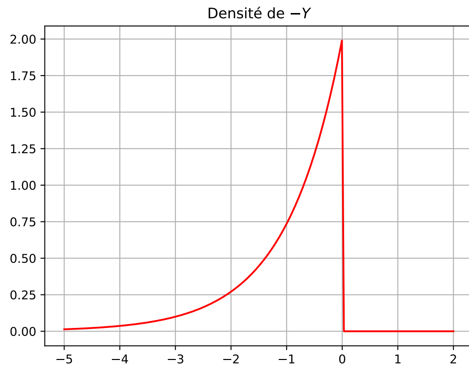
$$\forall t \leq 0 \quad F_{-Y}(t) = 1 - (1 - e^{\mu t}) = e^{\mu t}. \tag{4}$$

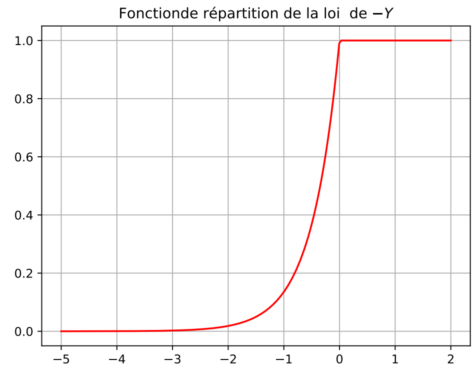
Régularité de F_{-Y}. La fonction F_{-Y} est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^\star$, d'après (3)-(4), donc sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en un point. Elle est de plus continue en 0 car $F_{-Y}(0) = P(Y \geq 0) = 1$, qui est aussi la limite à gauche et à droite de $F_{-Y}(t)$ d'après (3)-(4). Ainsi, $-Y$ est bien une variable à densité.

Obtention d'une densité de $-Y$. On obtient une densité f_{-Y} en dérivant F_{-Y} là où c'est possible, ce qui donne :

$$f_{-Y}(t) = \left| \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & t > 0 \\ \mu e^{\mu t} & \text{si} & t \leq 0. \end{array} \right. \tag{5}$$

Cela donne les tracés suivants, déduits par opérations usuelles sur les fonctions :





b) Puisque $X - Y = X + (-Y)$ et que les variables X et $-Y$ sont à densité et indépendantes, on sait que $X - Y$ est à densité et qu'on obtient une densité f de $X - Y$ en calculant l'intégrale suivante :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_{-Y}(x-t) \mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \mathbf{R}$ fixé et déterminons pour quelles valeurs de t l'intégrande $h(t) = f_X(t) f_{-Y}(x-t)$ est non nulle :

$$\begin{aligned} h(t) > 0 \quad & \Leftrightarrow \quad f_X(t) f_{-Y}(x-t) > 0 \\ & \Leftrightarrow \quad f_X(t) > 0 \quad \text{et} \quad f_{-Y}(x-t) > 0 \\ & \Leftrightarrow \quad t > 0 \quad \text{et} \quad x - t < 0 \\ & \Leftrightarrow \quad t > 0 \quad \text{et} \quad t > x \\ & \Leftrightarrow \quad t > \max(x, 0). \end{aligned}$$

Autrement dit, si $x < 0$, le support de h est $I = \mathbf{R}_+$, sinon, le support est $I = [x, +\infty[$. Dans les deux cas, on obtient l'expression de $f(x)$ en intégrant $h(t) = \lambda e^{-\lambda t} \times \mu e^{\mu(x-t)} = \lambda \mu e^{\mu x} \times e^{-(\lambda+\mu)t}$ sur I. Il ne reste plus qu'à effectuer l'intégration et on trouve que

$$f(x) = \left| \begin{array}{ccc} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{\mu x} & \text{si} & x \leq 0 \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda x} & \text{si} & x > 0. \end{array} \right.$$

c) D'après les règles de calcul des probabilités sur les variables à densité :

$$P([X - Y \leq 0]) = \int_{-\infty}^{0} f(t) \mathrm{d}t = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

.

4. **a)** Comme les entiers $n-1$ et $n+1$ on même parité, on propose le script suivant :

```python
def is_creux(n):
    if n%2==0:
        return expo(1)<minXY(2,2)
    else:
        return expo(2)<minXY(1,1)
```

b) La simulation précédente indique que les évènements C_k ne dépendent que de la parité de k, il suffit donc d'estimer les probabilités de C_1 et C_2 : on appelle un grand nombre de fois la fonction `is_creux(n)` et la fréquence observée des succès fournit une estimation de $P(C_n)$:

```python
#estimation
N = 10000
run1 ,run2 = [ [is_creux(n) for _ in range(N)] for n in [1,2]]
freq1,freq2=sum(run1)/N, sum(run2)/N
```

```
console
In [1]: freq1,freq2
Out[1]: (0.498, 0.1995)
```

c) Soit $n \geq 1$. On remarque que $C_n = [X_n \leq X_{n-1}] \cap [X_n \leq X_{n+1}]$, donc $C_n = [X_n \leq \min(X_{n-1}, X_{n+1})]$. En notant $Z_n = \min(X_{n-1}, X_{n+1})$, on sait d'après **2.b**, que Z_n suit une loi exponentielle puisque X_{n-1} et X_{n+1} sont indépendantes, et comme $P(C_n) = P(X_n - Z_n \leq 0)$, le calcul de $P(C_n)$ découle de **3.c)**, ce qui donne :

$$P(C_n) = \left| \begin{array}{lll} \dfrac{1}{1+(2+2)} = \dfrac{1}{5} & \text{si} & n \text{ est pair} \\ \dfrac{2}{2+(1+1)} = \dfrac{1}{2} & \text{si} & n \text{ est impair} \end{array} \right.$$

et prouve la conjecture de **4. b)**.

5. **a)** Par implication d'évènements $C_n \cap C_{n+1} \subset [X_n - X_{n+1} = 0]$. Comme la variable $X_n - X_{n+1}$ est à densité, $P([X_n - X_{n+1} = 0]) = 0$ et *a fortiori* $P(C_n \cap C_{n+1}) = 0$.

b)
- Si $|m-n| = 1$, c'est-à-dire : m et n sont deux entiers consécutifs, la question précédente montre que $P(C_n \cap C_m)$ est nul, alors que les $P(C_k)$ ne le sont jamais : C_n et C_m ne peuvent être indépendants.
- Si $|m-n| \geq 2$, d'après le lemme des coalitions, les évènements C_n et C_m sont indépendants.
- Si $|m-n| = 2$, ce n'est pas évident, mais les évènements C_m et C_n ne sont pas indépendants. La preuve repose sur des techniques hors-programme.