Devoir Maison n°10

Matrice de Gram

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2, et soient $u_1, \cdots, u_p$ des vecteurs de $\mathbf{R}^n$.
On appelle matrice de Gram de la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ égale à

$$G = \big(\langle u_i, u_j \rangle\big)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$$

où $\langle u_i, u_j \rangle$ désigne le produit scalaire des vecteurs u_i et u_j.

1. En langage *Python*, un vecteur de $\mathbf{R}^n$ est représenté par la liste (de longueur n) de ses coordonnées.
   (a) Écrire une fonction `prod_scal`(u, v) prenant en argument deux vecteurs u et v et qui renvoie le produit scalaire $\langle u, v \rangle$.
   (b) On représente une famille de p vecteurs de $\mathbf{R}^n$ par la liste (de longueur p) des listes (de longueur n) représentant chaque vecteur.

   Écrire une fonction `Gram`(L) prenant en argument une liste L représentant une famille $u_1, \cdots, u_p$ de vecteurs de $\mathbf{R}^n$, qui renvoie la matrice de Gram associée à cette famille.

2. Justifier que la matrice G est diagonalisable.

3. Dans cette question, et uniquement dans cette question, on prend $p = 2$.
   Montrer que la matrice de Gram de la famille (u_1, u_2) est inversible si, et seulement si, la famille (u_1, u_2) est libre.

4. On revient au cas général et on suppose que la matrice G est inversible.

   Soient $a_1, \cdots, a_p$ des nombres réels tels que $\sum_{k=1}^{p} a_k u_k = 0$. On note X la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que : $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\sum_{k=1}^{p} a_k \langle u_i, u_k \rangle = 0$.
   (b) En déduire que $GX = 0$ puis que la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ est libre.

5. Dans cette dernière question, on suppose que $p = n$.
   Soient $v_1, \cdots, v_n$ des vecteurs de $\mathbf{R}^n$ tels que :

   $$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \|v_i\| = 1 \ \text{ et } \ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \text{si } i \neq j,\ \text{alors } \|v_i - v_j\| = 1.$$

   (a) Montrer que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\|v_i - v_j\|^2 = \|v_i\|^2 + \|v_j\|^2 - 2\langle v_i, v_j \rangle$.
   (b) En déduire la matrice de Gram G de la famille $(v_1, ..., v_n)$.
   (c) On pose $A = 2G$. Exprimer A en fonction de la matrice identité I_n et de la matrice $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
   (d) Justifier que J_n est diagonalisable. Est-elle inversible ?
   En déduire une valeur propre λ de J_n, et étudier l'espace-propre $E_\lambda(J_n)$ associé.
   (e) Montrer que $n \in \mathrm{Sp}(J_n)$, et retrouver le fait que J_n est diagonalisable.
   On expliquera en particulier pourquoi J_n n'a pas d'autre valeur propre que λ et n, et on précisera une matrice diagonale D semblable à J_n.
   (f) Déduire des questions précédentes une matrice diagonale Δ semblable à G.
   (g) Montrer que la matrice G est inversible.
   En déduire que la famille $(v_1, ..., v_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$.