Corrigé du DM n°10

Matrice de Gram

1. (a) À partir des listes u et v, on calcule la somme $\sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ où n est la longueur des listes u et v :

```
def prod_scal(u,v) :
    S = 0
    for i in range(len(u)) :
        S += u[i]*v[i]
    return S
```

(b) On crée un tableau numpy nul de taille (p,p) où p est la longueur de la liste L puis, pour tout (i,j) de $[\![1,p]\!]^2$, on définit le terme d'indices (i,j) égal au produit scalaire $\langle u_i, u_j\rangle$:

```
import numpy as np
def Gram(L) :
    p = len(L)
    G = np.zeros((p,p))
    for i in range(p) :
        for j in range(p) :
            G[i,j] = prod_scal(L[i],L[j])
    return G
```

2. Comme le produit scalaire est symétrique, $\forall\,(i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ \langle u_i, u_j\rangle = \langle u_j, u_i\rangle$.
G est donc symétrique réelle donc $\boxed{\text{la matrice } G \text{ est diagonalisable.}}$

3. La matrice de Gram de la famille (u_1, u_2) est $G = \begin{pmatrix} \langle u_1,u_1\rangle & \langle u_1,u_2\rangle \\ \langle u_2,u_1\rangle & \langle u_2,u_2\rangle \end{pmatrix}$.
G est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul.
Or $\det G = \langle u_1,u_1\rangle\langle u_2,u_2\rangle - \langle u_1,u_2\rangle\langle u_2,u_1\rangle = \|u_1\|^2\,\|u_2\|^2 - \langle u_1,u_2\rangle^2$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\langle u_1,u_2\rangle| \leqslant \|u_1\|\,\|u_2\|$ et $|\langle u_1,u_2\rangle| = \|u_1\|\,\|u_2\|$ si, et seulement si, u_1 et u_2 sont liés.
Cela nous conduit à $\langle u_1,u_2\rangle^2 = (\|u_1\|\,\|u_2\|)^2$ si, et seulement si, u_1 et u_2 sont colinéaires.
On en déduit que $\det G \neq 0 \Leftrightarrow u_1$ et u_2 ne sont pas liés. Autrement dit,
$\boxed{\text{la matrice de Gram de la famille } (u_1,u_2) \text{ est inversible si, et seulement si, la famille } (u_1,u_2) \text{ est libre.}}$

4. (a) Par bilinéarité du produit scalaire, $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \sum_{k=1}^{p} a_k\langle u_i,u_k\rangle = \langle u_i, \sum_{k=1}^{p} a_k u_k\rangle = \langle u_i, 0\rangle$.

On a bien : $\boxed{\forall i \in [\![1,p]\!],\ \sum_{k=1}^{p} a_k\langle u_i,u_k\rangle = 0.}$

(b) Par définition GX est la matrice colonne $\left(\sum_{k=1}^{p} a_k\langle u_i,u_k\rangle\right)_{i\in[\![1,p]\!]}$.

D'après **4a.**, on a bien $\boxed{GX = 0.}$
Comme G est supposée inversible, en multipliant à gauche par G^{-1}, on a $GX = 0 \Rightarrow X = 0$.
Ainsi si $\sum_{k=1}^{p} a_k u_k = 0$ alors $\forall k \in [\![1,p]\!],\ a_k = 0$: $\boxed{\text{la famille } (u_1, \ldots u_p) \text{ est libre.}}$

5. (a) Par définition et bilinéarité du produit scalaire,
$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ ||v_i - v_j||^2 = \langle v_i - v_j, v_i - v_j\rangle = \langle v_i,v_i\rangle - \langle v_j,v_i\rangle - \langle v_i,v_j\rangle + \langle v_j,v_j\rangle$.
Comme $\langle v_i,v_i\rangle = ||v_i||^2,\ \langle v_j,v_i\rangle = \langle v_i,v_j\rangle$ et $\langle v_j,v_j\rangle = ||v_j||^2$,
on a bien : $\boxed{\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ ||v_i - v_j||^2 = ||v_i||^2 + ||v_j||^2 - 2\langle v_i,v_j\rangle.}$

(b) On déduit que : $\forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ \langle v_i,v_j\rangle = \dfrac{1}{2}\big(\|v_i\|^2+\|v_j\|^2-\|v_i-v_j\|^2\big)$.

Comme $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \|v_i\|=1$ et $\forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $i\neq j,\ \|v_i-v_j\|=1$,

on a $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \langle v_i,v_i\rangle=\|v_i\|^2=1$ et $\forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, tel que $i\neq j,\ \langle v_i,v_j\rangle=\dfrac{1}{2}$.

D'où $\boxed{\text{la matrice de Gram } G \text{ de la famille } (v_1,\ldots,v_n) \text{ est } G=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}}$.

(c) $A=2G=\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 2\end{pmatrix}$ donc $\boxed{A=I_n+J_n.}$

(d) J_n est symétrique réelle, donc $\boxed{J_n \text{ est diagonalisable.}}$

Les lignes de J_n sont identiques donc $\boxed{J_n \text{ n'est pas inversible}}$.

On en déduit que $\boxed{\lambda=0\in\mathrm{Sp}(J_n).}$ On étudie $E_0(J_n)$ en résolvant l'équation $J_nX=0$

pour X une matrice-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. En notant $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, on obtient :

$J_nX=0\Leftrightarrow x_1+\cdots+x_n=0$ donc on peut exprimer x_1 en fonction des variables libres $x_2,\cdots,x_n$.

On trouve alors : $\boxed{E_0(J_n)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}-1\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right)}$. En particulier, $\boxed{\dim\big(E_0(J_n)\big)=n-1.}$

(e) En posant $X=\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$, on a : $J_nX=nX$ et $X\neq 0$ donc X est vecteur propre de J_n associé à la valeur propre n. Puisque $\dim\big(E_0(J_n)\big)=n-1$, on a nécessairement $\dim\big(E_n(J_n)\big)=1$

donc $\boxed{\mathrm{Sp}(J_n)=\{0,n\}}$ et la somme des dimensions des espaces propres de J_n vaut n :

$\boxed{J_n \text{ est diagonalisable}}$ et la matrice $\boxed{D=\mathrm{Diag}(0,0,\cdots,0,n) \text{ est semblable à } J_n.}$

(f) D'après la question précédente, on peut écrire $J_n=PDP^{-1}$ avec P une matrice inversible.

On a alors : $G=\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}(I_n+J_n)=\frac{1}{2}(PI_nP^{-1}+PDP^{-1})=P\left(\frac{1}{2}(I_n+D)\right)P^{-1}$

On pose $\Delta=\frac{1}{2}(I_n+D)=\mathrm{Diag}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2},\frac{n+1}{2})$ et on a : $G=P\Delta P^{-1}$.

$\boxed{G \text{ est semblable à la matrice diagonale } \Delta=\mathrm{Diag}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\cdots,\tfrac{1}{2},\tfrac{n+1}{2}).}$

(g) D'après la question précédente, $\mathrm{Sp}(G)=\left\{\frac{1}{2},\frac{n+1}{2}\right\}$.

0 n'est pas valeur propre de G, donc $\boxed{G \text{ est inversible.}}$

D'après la question **4)**, la famille $(v_1,\cdots,v_n)$ est libre.

Puisqu'elle est de cardinal n qui est la dimension de $\mathbf{R}^n$,

on en déduit que $\boxed{(v_1,\cdots,v_n) \text{ est une base de } \mathbf{R}^n.}$