DS n°6, mathématique

Durée : 2 heures
L'énoncé est constitué de deux exercices indépendants.
Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation.
L'usage des calculatrices est interdit. Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 : décomposition de matrices symétriques réelles

Toutes les matrices considérées dans cet exercice sont à coefficients réels.

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par :

$$\forall u = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ f(u) = (2x+y+z,\ x+2y+z,\ x+y+2z)$$

Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ et $u_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$.
On note enfin I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

(a) Calculer $f(u_1)$. En déduire un vecteur propre de f et donner la valeur propre associée.
(b) Donner la matrice A de l'endomorphisme f relativement à la base canonique.
(c) Expliquer pourquoi f est diagonalisable.
(d) Montrer que l'ensemble des vecteurs u tels que $f(u) = u$ est un sous-espace propre de f et que ce sous-espace propre admet pour base orthonormée (u_2, u_3).
(e) Déterminer une matrice P et une matrice diagonale D telles que $A = PD^2P^T$ et $PP^T = I_3$.
(f) En déduire qu'il existe une matrice inversible L telle que $A = LL^T$.

2. Soit B une matrice symétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
On pose $C = L^{-1}B\left(L^{-1}\right)^T$ où L est la matrice trouvée à la question **2f)**.

(a) Vérifier que C est une matrice symétrique.
(b) En déduire qu'il existe une matrice diagonale $\Delta \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que : $B = LQ\Delta\left(LQ\right)^T$ et $Q^{-1} = Q^T$.

On pose $R = LQ$, de sorte que $B = R\Delta R^T$.

(c) Calculer RR^T.

3. Soit δ une matrice diagonale d'ordre $n \geqslant 1$ dont les éléments diagonaux sont $(d_1, \cdots, d_n)$.

(a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne. Vérifier que : $X^T\delta X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i)^2$.
(b) En déduire que les coefficients diagonaux de δ sont tous strictement positifs si et seulement si $X^T\delta X > 0$ pour toute matrice colonne X non nulle.

Exercice 2 : endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions

Dans tout l'exercice, on note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$:

$$E = \mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$$

Soient f_0, f_1 et f_2 les fonctions définies sur $\mathbf{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0,\ f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x \quad \text{et} \quad f_2(x) = \begin{cases} x.\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. (a) Rappeler la limite en 0 de $x.\ln(x)$.
   (b) En déduire que $f_2 \in E$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $\forall x \geqslant 0$, $g(x) = x f_2(x)$.
   (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbf{R}_+$, et que : $\forall x \geqslant 0,\ g'(x) = \begin{cases} 2x\ln(x) + x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
   (b) En déduire que $g' \in E$.

Dans toute la suite de l'exercice, on note F le sous-espace vectoriel de E engendré par f_0, f_1, f_2 :

$$F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2)$$

3. Prouver que la famille (f_0, f_1, f_2) est une base de F.
4. Pour toute fonction h de F, on note $\Phi(h)$ la fonction dérivée de la fonction $x \longmapsto xh(x)$.
   (a) Montrer que : $\Phi(f_0) = f_0$ et que $\Phi(f_1) = 2f_1$.
   (b) En utilisant la fonction g de la question **2.**, exprimer $\Phi(f_2)$ en fonction de f_0, f_1, f_2.
   (c) Montrer que l'application $\Phi : h \longmapsto \Phi(h)$ est linéaire.
   (d) En déduire que Φ est un endomorphisme de F et préciser sa matrice M dans la base (f_0, f_1, f_2) de F.
   (e) L'endomorphisme Φ est-il bijectif ?
   Si oui, préciser la matrice de sa bijection réciproque Φ^{-1} dans la base (f_0, f_1, f_2).
   (f) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ? Justifier.

$\ast \ast \ast$ Fin du sujet $\ast \ast \ast$