

Corrigé du DS n°6

Exercice 1 : décomposition de matrices symétriques réelles

1. (a) On calcule $f(u_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(4, 4, 4) = 4u_1$. De plus, $u_1 \neq 0$.

u_1 est vecteur propre de f , associé à la valeur propre 4.

- (b) On calcule les images par f des vecteurs de la base canonique \mathcal{B} de \mathbf{R}^3 :

$$f(1, 0, 0) = (2, 1, 1), \quad f(0, 1, 0) = (1, 2, 1) \quad \text{et} \quad f(0, 0, 1) = (1, 1, 2).$$

Conclusion : $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- (c) A est symétrique à coefficients réels donc f est diagonalisable.

- (d) • On calcule $f(u_2)$ et $f(u_3)$, on trouve : $f(u_2) = u_2$ et $f(u_3) = u_3$.

Puisque u_2 et u_3 sont non nuls, 1 est valeur propre de f , et $u_2, u_3 \in E_1(f)$.

• u_2 et u_3 ne sont pas colinéaires : ils forment une famille libre, et $\dim(E_1(f)) \geq 2$.

• Puisque 4 est une autre valeur propre de f et que la somme des dimensions des espaces propres de f est inférieure ou égale à 3, on en déduit que $\dim(E_1(f)) = 2$.

La famille (u_2, u_3) , libre et de cardinal 2, est donc une base de $E_1(f)$.

• On vérifie enfin que (u_2, u_3) est orthonormale :

$$\|u_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|(1, -1, 0)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = 1 \quad \text{et de même} \quad \|u_3\| = 1.$$

$$\langle u_2, u_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}(1 \times 1 + (-1) \times 1 + 0 \times (-2)) = 0 \quad \text{donc} \quad u_2 \perp u_3.$$

Conclusion : $\{u \in \mathbf{R}^3, f(u) = u\} = E_1(f)$ de base orthonormée (u_2, u_3) .

- (e) On a : $A = P \text{Diag}(4, 1, 1)P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

La matrice P est la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B} (orthonormée) vers la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ constituée de vecteurs propres de f . Montrons que \mathcal{B}' est orthonormée :

on vérifie que $\|u_1\| = 1$, et que $u_1 \perp u_2$ et $u_1 \perp u_3$ en calculant les produits scalaires $\langle u_1, u_2 \rangle$ et $\langle u_1, u_3 \rangle$. On trouve bien $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = 0$. Puisque la famille (u_2, u_3) est orthonormée, on en déduit que \mathcal{B}' est une base orthonormée de \mathbf{R}^3 .

La matrice P est donc orthogonale : $P^{-1} = P^T$.

Enfin, on pose par exemple $D = \text{Diag}(2, 1, 1)$, de sorte que $D^2 = \text{Diag}(4, 1, 1)$.

On a finalement : $A = PD^2P^T$.

- (f) On pose $L = PD$. Alors $LL^T = (PD)(PD)^T = PDD^T P^T$ et D est diagonale donc $D^T = D$.

Finalement : $LL^T = PD^2P^T$ donc $LL^T = A$.

P est inversible : c'est une matrice de passage. D est inversible car aucun de ses termes diagonaux n'est nul. Le produit de 2 matrices inversibles est une matrice inversible : L est inversible.

2. (a) On calcule la transposée de C :

$$C^T = (L^{-1}B(L^{-1})^T)^T = ((L^{-1})^T)^T B^T (L^{-1})^T = L^{-1}B(L^{-1})^T = C$$

par règle sur la transposée d'un produit, et puisque B est symétrique.

Conclusion : $C^T = C$ donc C est symétrique.

(b) C est symétrique à coefficients réels, donc elle est diagonalisable en base orthonormée (théorème spectral) : il existe Δ diagonale et Q inversible telle que $C = Q\Delta Q^T$ et $Q^T = Q^{-1}$.

On remplace C par sa définition : $L^{-1}B(L^{-1})^T = Q\Delta Q^T$

On multiplie à gauche par L et à droite par L^T : $B = LQ\Delta Q^T L^T$

Enfin, $Q^T L^T = (LQ)^T$ donc on trouve :

$$B = LQ\Delta(LQ)^T \text{ avec } \Delta \text{ diagonale, } Q \text{ inversible et } Q^{-1} = Q^T.$$

(c) $RR^T = (LQ)(LQ)^T = LQQ^T L^T$ et $QQ^T = I_3$ donc $RR^T = LL^T = A$ d'après **1f**.

3. (a) Par définition du produit matriciel : $\delta X = \begin{pmatrix} d_1 x_1 \\ \vdots \\ d_n x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Ainsi $X^T(\delta X)$ est le produit scalaire $\langle (x_1 \cdots x_n), (d_1 x_1 \cdots d_n x_n) \rangle$.

Conclusion : $X^T \delta X = \sum_{i=1}^n d_i (x_i)^2$.

(b) On demande de prouver une équivalence. On procède par double-implication :

- si tous les coefficients de δ sont strictement positifs, alors $\sum_{i=1}^n d_i (x_i)^2$ est une somme de termes positifs, donc $X^T \delta X \geq 0$.

En supposant de plus $X \neq 0$, il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_k \neq 0$, donc $d_k (x_k)^2 > 0$.

Puisque $X^T \delta X \geq d_k (x_k)^2$, on en déduit que $X^T \delta X > 0$.

- Réciproquement, si $X^T \delta X > 0$ pour toute matrice colonne $X \neq 0$, on applique ce résultat aux matrices X_k de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$: $(X_k)_i = 1$ si $i = k$ et 0 sinon.

On obtient : $(X_k)^T \delta X_k = d_k \times 1^2 = d_k$ donc $d_k > 0$, et ceci pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Conclusion : les coefficients diagonaux de δ sont tous strictement positifs si et seulement si $X^T \delta X > 0$ pour toute matrice colonne X non nulle.

Exercice 2 : endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions

1. (a) Par croissances comparées : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$

(b) Il s'agit de montrer que f_2 est continue sur \mathbf{R}_+ .

Par opérations, f_2 est continue sur \mathbf{R}_+^* .

D'après **1a**), $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = f_2(0)$ donc f_2 est continue en 0.

Conclusion : $f_2 \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+)$ c'est-à-dire $f_2 \in E$.

2. a) Sur \mathbf{R}_+^* , $g(x) = x^2 \ln(x)$ donc g est dérivable par opérations et on a :

$$\forall x > 0, g'(x) = 2x \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln(x) + x.$$

En 0, on étudie le taux d'accroissement $\Delta_0(h) = \frac{g(h) - g(0)}{h - 0}$ si $h > 0$, et sa limite quand $h \rightarrow 0$.

Pour tout $h > 0$, on a : $\Delta_0(h) = \frac{h^2 \ln(h)}{h} = h \ln(h) \rightarrow 0$ par croissances comparées.

Ainsi, g est dérivable en 0, et $g'(0) = 0$.

Conclusion : g est dérivable sur \mathbf{R}_+ , et : $\forall x \geq 0, g'(x) = \begin{cases} 2x \ln(x) + x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

b) g' est continue par opérations sur \mathbf{R}_+^* .

De plus, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x) + x = 0 = g'(0)$

donc g' est continue en 0. Conclusion : $g' \in E$.

3. • Par définition de F , la famille (f_0, f_1, f_2) est génératrice de F .

• Liberté de la famille (f_0, f_1, f_2) :

Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$ et supposons que : $\forall x \in \mathbf{R}_+, af_0(x) + bf_1(x) + cf_2(x) = 0$ (*).

Montrons que : $a = b = c = 0$. On choisit trois valeurs de x :

- pour $x = 0$, (*) $\Rightarrow a + 0 + 0 = 0$ donc $a = 0$

- pour $x = 1$, (*) $\Rightarrow a + b + 0 = 0$ donc $b = 0$ (car $a = 0$)

- pour $x = e$, (*) $\Rightarrow a + be + ce = 0$ donc $c = 0$ (car $a = b = 0$)

La famille (f_0, f_1, f_2) est donc libre. Conclusion : la famille (f_0, f_1, f_2) est une base de F .

4. (a) $\Phi(f_0)$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto xf_0(x) = x$ donc $\Phi(f_0) = 1 = f_0$.

$\Phi(f_1)$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto xf_1(x) = x^2$

donc $\forall x \in \mathbf{R}_+, \Phi(f_1)(x) = 2x = 2f_1(x)$ et $\Phi(f_1) = 2f_1$.

(b) D'après **2a**), $g' = 2f_2 + f_1$ donc $\Phi(f_2) = 2f_2 + f_1$.

(c) Soit $h \in F$. Alors h est une combinaison linéaire des fonctions dérivables f_0, f_1, f_2 donc h est dérivable, et $\forall x \in \mathbf{R}_+, \Phi(h)(x) = h(x) + xh'(x)$.

Soient $h_1, h_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{R}_+, \Phi(\lambda h_1 + h_2)(x) &= (\lambda h_1 + h_2)(x) + x(\lambda h_1 + h_2)'(x) \\ &= \lambda(h_1(x) + xh_1'(x)) + h_2(x) + xh_2'(x) \\ &= \lambda\Phi(h_1)(x) + \Phi(h_2)(x) \end{aligned}$$

donc $\Phi(\lambda h_1 + h_2) = \lambda\Phi(h_1) + \Phi(h_2)$. Conclusion : Φ est linéaire.

(d) Soit $h \in F : \exists a, b, c \in \mathbf{R} \mid h = af_0 + bf_1 + cf_2$ et par linéarité de Φ , $\Phi(h) = a\Phi(f_0) + b\Phi(f_1) + c\Phi(f_2)$.

Or d'après **4a**) et **4b**), $\Phi(f_0), \Phi(f_1)$ et $\Phi(f_2) \in F$. Donc $\Phi(h) \in F$.

On en déduit que $\Phi \in \mathcal{L}(F)$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(e) M est triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls :

M est inversible et Φ est bijective.

On trouve facilement : $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(f) M est triangulaire, donc on peut lire ses valeurs propres sur sa diagonale : $\text{Sp}(M) = \{1, 2\}$.

• Étude de $E_2(M)$: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(M) \Leftrightarrow MX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x \\ 2y + z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

donc $E_2(M) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\dim(E_2(M)) = 1$.

• Étude de $E_1(M)$: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(M) \Leftrightarrow MX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ 2y + z = y \\ 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

donc $E_1(M) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\dim(E_1(M)) = 1$.

$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \dim(E_\lambda(M)) = 2 < 3$ donc M , comme Φ , ne sont pas diagonalisables.