Agro-Véto 2018 Sujet A - 2h30

Exercice

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{c^2} e^{-t^2/(2c^2)} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } c > 0 \text{ fixé.}$$

1 Étude de f

Sur $\mathbb{R}_+^*$, f dérivable par opérations et : $\forall t > 0$, $f'(t) = \dfrac{c^2 - t^2}{c^4} \cdot e^{-\frac{t^2}{2c^2}}$

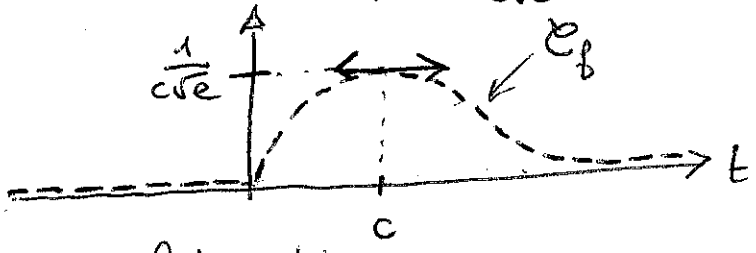
D'où :

t	0		c		$+\infty$
$f'(t)$	?	+	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0

en justifiant :

- $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$ par croissances comparées
- $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} f(t) = 0$ par opération.

On calcule $M = f(c) = \dfrac{1}{c\sqrt{e}}$



2 f densité

- f continue sur $\mathbb{R}$.
- f positive sur $\mathbb{R}$.
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2c^2}}\right]_0^{+\infty} = 1$

f est une densité de probabilité.

3 X de densité f admet une espérance

a- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$

b. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt = 1$ (loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$)

on pose $\mu = 0$ et $\sigma = c$; $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2c^2}\,dt = 1$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2c^2}\,dt = c\sqrt{2\pi}$ et par parité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2c^2}}\,dt = \frac{c\sqrt{2\pi}}{2}$.

c. X possède une espérance ssi : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} t \cdot f(t)\,dt$ converge absolument.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{c^2} e^{-\frac{t^2}{2c^2}}\,dt$ se calcule par IPP. ~~Par parité, on intègre sur $\mathbb{R}_+$.~~

On pose $\begin{cases} u(t) = -e^{-t^2/2c^2} \\ v(t) = t \end{cases}$ $u, v \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+)$ et $\begin{cases} u'(t) = \frac{t}{c^2} e^{-t^2/2c^2} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$

$$\int_0^{+\infty} t\cdot f(t)\,dt = \underbrace{\left[-t\,e^{-\frac{t^2}{2c^2}}\right]_0^{+\infty}}_{\text{converge par C.C. vers 0}} - \underbrace{\int_0^{+\infty} -e^{-\frac{t^2}{2c^2}}\,dt}_{\text{converge d'après 3b}} = \frac{c\sqrt{2\pi}}{2}$$

Conclusion : X admet une espérance, et $\cancel{E(X) = 2\times\frac{c\sqrt{2\pi}}{2}}$ $\boxed{E(X) = c\frac{\sqrt{2\pi}}{2}}$

4) Relation de récurrence sur les moments

Si X^n admet une espérance $\int_{\mathbb{R}} t^n f(t)\,dt$ converge absolument (théorème de transfert).

On calcule $\int_{\mathbb{R}} t^{n+2} f(t)\,dt$ par IPP : $\begin{cases} u(t) = -e^{-t^2/2c^2} \\ v(t) = t^{n+2} \end{cases}$, $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2} f(t)\,dt = \underbrace{\left[-t^{n+2}\,e^{-\frac{t^2}{2c^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{\text{converge vers 0 par C.C.}} + c^2(n+2)\underbrace{\int_{-\infty} \frac{t^{n+1}}{c^2}\,e^{-t^2/2c^2}\,dt}_{= E(X^n) \text{ par hypothèse}}$$

Conclusion : Si X^n admet une espérance, alors X^{n+2} aussi et $\boxed{E(X^{n+2}) = c^2(n+2)\cdot E(X^n)}$

5) Calcul des moments

$E(X^0) = E(1) = 1$

$E(X^1) = E(X) = c\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_n$ la propriété $\begin{cases} E(X^{2n}) = 2^n c^{2n} \cdot n! \\ E(X^{2n+1}) = \sqrt{2\pi}\,\frac{(2n+1)!\,c^{2n+1}}{2^{n+1}\cdot n!} \end{cases}$

- $\mathcal{P}_0$ vraie.
- Soit $n \geq 0$, supposons $\mathcal{P}_n$.

Alors : $E(X^{2n+2}) = c^2(2n+2)\,E(X^{2n})$
$= c^2(2n+2)\,2^n c^{2n}\cdot n! = c^{2n+2}\cdot 2^{n+1}\cdot(n+1)!$

et $E(X^{2n+3}) = c^2(2n+3)\,E(X^{2n+1})$
$= c^2(2n+3)\cdot\frac{\sqrt{2\pi}\,(2n+1)!\,c^{2n+1}}{2^{n+1}\cdot n!} \times \frac{2n+2}{2n+2}$
$= \sqrt{2\pi}\cdot\frac{(2n+3)!\,c^{2n+3}}{2^{n+2}(n+1)!}$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie.

6 Intervalle de confiance à 99%

a. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

Si X admet un moment d'ordre 2, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon \right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

ou encore : $\mathbb{P}\left(X \in [\mathbb{E}(X) - \varepsilon, \mathbb{E}(X) + \varepsilon] \right) \geqslant 1 - \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$

b. Variance de X

On applique König-Huygens : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$$= 2c^2 - \left(\frac{c\sqrt{2\pi}}{2}\right)^2$$

donc $\boxed{\mathbb{V}(X) = c^2 \times \frac{4-\pi}{2}}$

c. Intervalle à 99% On résout : $1 - \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2} = 99\% = 0,99$

donc $\dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2} = 0,01$ et $\varepsilon^2 = 100 . \mathbb{V}(X)$ soit $\varepsilon = 10\sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

On pose : $\boxed{\varepsilon = 10c\sqrt{\frac{4-\pi}{2}}}$ puis $\begin{cases} a = \mathbb{E}(X) - \varepsilon \\ b = \mathbb{E}(X) + \varepsilon \end{cases}$

Soit, $\boxed{\begin{aligned} a &= c\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}} - 10\sqrt{\tfrac{4-\pi}{2}}\right) \\ b &= c\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}} + 10\sqrt{\tfrac{4-\pi}{2}}\right) \end{aligned}}$

7 Fonction quantile

$\mathbb{P}(X \in [0, \gamma]) = 99\% \iff \displaystyle\int_0^\gamma f(t)\,dt = 0,99$

$\iff \left[-e^{-t^2/2c^2}\right]_0^\gamma = 0,99 \iff 1 - e^{-\gamma^2/2c^2} = 0,99$

$\iff e^{-\gamma^2/2c^2} = 0,01 \iff \boxed{\gamma = 2c\sqrt{\ln 10}}$

8 Comparaison

difficile sans calculatrice... on pose $c = 1$ pour comparer.

$\ln 10 \simeq 2,3$

$2\sqrt{\ln 10} \simeq 2 \times 1,5 \simeq 3$

$\boxed{\gamma \simeq 3}$

$\sqrt{2\pi} \simeq 2,5$ donc $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \simeq 1,25$

$\frac{4-\pi}{2} \simeq 0,43$ donc $\sqrt{\frac{4-\pi}{2}} \simeq 0,65$

et $b \simeq 1,25 + 10 \times 0,65$

$\boxed{b \simeq 7,8}$ et $\boxed{a < 0}$

$\boxed{\text{l'intervalle } [0, \gamma] \text{ est inclus dans } [a, b].}$

Problème : urnes d'Ehrenfest

I Matrice de transition

1. Cas où $N=2$

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1}=0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=2) \end{pmatrix}$.

On exprime ces probabilités grâce au SCE : $([X_n=0],[X_n=1],[X_n=2])$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=0) = \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(X_n=k) \times \mathbb{P}(X_{n+1}=0 \mid X_n=k)$$

$$= 0 \times \mathbb{P}(X_n=0) + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(X_n=1) + 0 \times \mathbb{P}(X_n=2)$$

et de même :

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1) = 1 \times \mathbb{P}(X_n=0) + 0 \times \mathbb{P}(X_n=1) + 1 \times \mathbb{P}(X_n=2)$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=2) = 0 \times \mathbb{P}(X_n=0) + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(X_n=1) + 0 \times \mathbb{P}(X_m=2)$$

Conclusion : $\boxed{Y_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot Y_n \quad \forall n \geqslant 0}$

(b) A_2 est diagonalisable

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$: $rg(A_2 - \lambda I_3) = rg\begin{pmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 \\ \boxed{1} & -\lambda & 1 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 0 & 1/2-\lambda^2 & \lambda \\ \boxed{1} & -\lambda & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2\lambda \end{pmatrix}$

$= rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & P(\lambda) \\ \boxed{1} & -\lambda & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2\lambda \end{pmatrix}$ avec $P(\lambda) = \lambda + 2\lambda\left(\frac{1}{2}-\lambda^2\right) = 2\lambda - 2\lambda^3$
$= 2\lambda(1-\lambda)(1+\lambda)$

donc $rg(A_2 - \lambda I_3) < 3 \iff P(\lambda)=0 \iff \lambda \in \boxed{Sp(A_2) = \{-1,0,1\}}$

A_2 possède 3 VAP distinctes donc A_2 est diagonalisable.

2. Cas général : $N \in \mathbb{N}^*$

Même raisonnement qu'au 1(a) : $([X_n=k])_{0 \leq k \leq N}$ est un SCE.

D'après la FPT : $\forall i \in [\![0,N]\!]$, $\mathbb{P}(X_{n+1}=i) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X_n=k) \times \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1}=i)$

On explicite : $\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1}=i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k+1 \text{ et } i \neq k-1 \\ \frac{N-k}{N} & \text{si } i = k+1 \text{ : on ajoute une boule à } U_1 \\ \frac{k}{N} & \text{si } i = k-1 \text{ : on enlève une boule de } U_1 \end{cases}$

Par définition du produit matriciel :

$$\forall i \in [\![0,N]\!], \ (Y_{n+1})_i = \sum_{k=0}^{N} (Y_n)_k \times \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1}=i) = (AY_n)_i.$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1}=0) & \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1}=0) & \cdots & \mathbb{P}_{[X_n=N]}(X_{n+1}=0) \\ \mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1}=1) & \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1}=1) & \cdots & \mathbb{P}_{[X_n=N]}(X_{n+1}=1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1}=N) & \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1}=N) & \cdots & \mathbb{P}_{[X_n=N]}(X_{n+1}=N) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/N & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 0 & 2/N & \cdots & & 0 \\ 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & 3/N & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1/N & 0 \end{pmatrix}$$

③ <u>Un espace propre de A^T</u> :

* Si $N=2$: $A_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On résout : $A_2^T X = X \iff \begin{cases} y = x \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z = y \\ y = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = x \end{cases} \iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\boxed{E_1(A_2^T) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

* Si $N=3$: $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$ donc $A_3^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

et $A_3^T X = X \iff \begin{cases} y = x \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z = y \\ \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}t = z \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = x \\ t = x \end{cases} \iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\boxed{E_1(A_3^T) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

④ <u>Cas général</u> : la somme de chaque colonne de A vaut 1 donc la somme de chaque ligne de A^T vaut 1. Si on pose $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})$, alors $A^T X = X$ et $X \neq 0$ donc $\boxed{1 \in Sp(A^T)}$.

5) $1 \in Sp(A)$

$1 \in Sp(A^T)$ donc $A^T - I$ n'est pas inversible (on note $I = I_{N+1}$).
donc $(A-I)^T$ n'est pas inversible.

Le rang est invariant par transposition donc :

$$rg\left((A-I)^T\right) < N+1 \iff rg\,(A-I) < N+1$$

Ainsi, $A-I$ n'est pas inversible, donc $\boxed{1 \in Sp(A)}$.

II Espérance de X_n

1) $(X_{n+1} - X_n)(\Omega) = \{-1, 1\}$

2) Récurrence entre $\mathbb{E}(X_{n+1})$ et $\mathbb{E}(X_n)$.

Par définition : $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = (-1) \times \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1) + 1 \times \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1)$

Grâce au SCE $\left([X_n = k]\right)_{0 \leq k \leq N}$ et d'après la FPT :

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = -\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X_n = k) \times \mathbb{P}_{[X_n = k]}(X_{n+1} - X_n = -1) + \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X_n = k) \times \mathbb{P}_{[X_n = k]}(X_{n+1} - X_n = 1)$$

$$= -\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X_n = k) \times \frac{k}{N} + \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X_n = k) \times \frac{N-k}{N}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X_n = k) \times \left(\frac{N-2k}{N}\right) = \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X_n = k)}_{=1=\mathbb{P}(\Omega)} - \frac{2}{N} \underbrace{\sum_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X_n = k)}_{\substack{=\mathbb{E}(X_n) \\ \text{par définition}}}$$

donc : $\boxed{\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = 1 - \frac{2}{N} . E(X_n)}$

3) Expression de $\mathbb{E}(X_n)$

D'après 2) : $\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right) . E(X_n)$ par linéarité de l'espérance.

On reconnaît une suite arithmético-géométrique.
Le point fixe ℓ vérifie : $\ell = 1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)\ell$ donc $\ell = \frac{N}{2}$.

Finalement : $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \frac{N}{2} + \left(E(X_0) - \frac{N}{2}\right) \times \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n, \ \forall n \geq 0}$

4) Limite de $E(X_n)$

Si $N > 2$, alors $\left|1 - \frac{2}{N}\right| < 1$ donc $\lim \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n = 0$

et $\boxed{\lim E(X_n) = \frac{N}{2}}$.

Après un grand nombre de tirages l'urne U_1 comporte en moyenne la moitié des boules.

III Probabilité Stationnaire

1) Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in E_1$. Alors $AX = X$ donc on a le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{N} x_1 = x_0 \\ x_0 + \frac{2}{N} x_2 = x_1 \\ \frac{N-1}{N} x_1 + \frac{3}{N} x_3 = x_2 \\ \vdots \\ \frac{N+1-k}{N} x_{k-1} + \frac{k+1}{N} x_{k+1} = x_k \quad (1) \\ \vdots \\ \frac{2}{N} x_{N-2} + x_N = x_{N-1} \\ \frac{1}{N} x_{N-1} = x_N \end{cases}$$

On pose pour $k \in [\![0, N]\!]$: $\mathcal{P}_k$: « $x_k = \binom{N}{k} x_0$ ».

- $\mathcal{P}_0$ vraie car $\binom{N}{0} = 1$
- $\frac{1}{N} x_1 = x_0$ donc $x_1 = N \cdot x_0 = \binom{N}{1} x_0$ donc $\mathcal{P}_1$ vraie.
- Soit $k \in [\![1, N-1]\!]$. On suppose $\mathcal{P}_{k-1}$ et $\mathcal{P}_k$ vraies.

Alors $(1) \Rightarrow x_{k+1} = \frac{N}{k+1}\left(x_k - \frac{N+1-k}{N} x_{k-1}\right)$

$= \frac{N}{k+1}\left(\binom{N}{k} x_0 - \frac{N+1-k}{N}\binom{N}{k-1} x_0\right)$ d'après $\mathcal{P}_{k-1}$ et $\mathcal{P}_k$

$= \frac{N}{k+1}\binom{N}{k}\left(1 - \frac{N+1-k}{N} \times \frac{k}{N+1-k}\right) x_0$ car $\binom{N}{k-1} = \frac{k}{N+1-k}\binom{N}{k}$

$= \frac{N-k}{k+1}\binom{N}{k} x_0 = \binom{N}{k+1} x_0$ donc $\mathcal{P}_{k+1}$ vraie.

2) On en déduit que $X = x_0 \begin{pmatrix} \binom{N}{0} \\ \binom{N}{1} \\ \vdots \\ \binom{N}{N} \end{pmatrix} = x_0 \cdot V$ donc $\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}(V)}$ et $\boxed{\dim E_1 = 1}$

3) $S = (1+1)^N = 2^N$ (binôme)

4) $\pi \in E_1$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\pi = \lambda V$. $\sum_{k=0}^{N} \pi_k = 1 = \lambda \sum_{k=0}^{N} V_k = \lambda \cdot 2^N$

donc seul $\lambda = 2^{-N}$ convient :

$\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix}$ avec $\boxed{\forall k \in [\![0, N]\!],\ \pi_k = 2^{-N}\binom{N}{k}}$.

5) $X_\infty(\Omega) = [\![0,N]\!]$

et $\forall k \in [\![0,N]\!]$, $\mathbb{P}(X_\infty = k) = \binom{N}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^N = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$

en posant $p = \frac{1}{2}$ et $q = 1-p = \frac{1}{2}$.

Ainsi, $\boxed{X_\infty \hookrightarrow \mathcal{B}(N, \frac{1}{2})}$ donc $\boxed{\mathbb{E}(X_\infty) = \frac{N}{2} \text{ et } \mathbb{V}(X_\infty) = \frac{N}{4}}$

6) Loi de X_n quand $X_0 \hookrightarrow \mathcal{B}(N, \frac{1}{2})$

Pour tout entier $n \geqslant 0$, la loi de X_n est donnée par la matrice colonne Y_n. On sait que : $\forall n \geqslant 0$, $Y_{n+1} = A.Y_n$.

Si $X_0 \hookrightarrow \mathcal{B}(N, \frac{1}{2})$, alors $Y_0 = \pi$ et on sait que π est VEP de A associé à la VAP 1 : $A\pi = \pi$ donc par récurrence immédiate : $\forall n \geqslant 0$, $Y_n = \pi$.

Ccl : $\boxed{\forall n \geqslant 0, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(N, 1/2)}$

Dans ce cas, la loi du nombre de boules de l'urne U_1 n'évolue pas : elle est stationnaire :

$$\boxed{\forall k \in [\![0,N]\!], \forall n \geqslant 0, \ \mathbb{P}(X_n = k) = 2^{-N} \cdot \binom{N}{k}}$$