Partie I : Analyse

1. Suites réelles

∗ Définitions :

- Suite (strictement) croissante, décroissante, monotone.
- Suite minorée, majorée, bornée. Majorant, minorant.
- Suite convergente, divergente vers $\pm\infty$. Nature d'une suite.
- Suites adjacentes.
- Suite négligeable devant une autre, suites équivalentes.

∗ Propriétés, théorèmes :

- Unicité de la limite si elle existe.
- Théorème de convergence monotone.
- Théorème des gendarmes.
- Théorème des suites adjacentes.
- Théorème de comparaison.
- Passage à la limite dans des inégalités.
- Théorème des suites extraites.
- Deux suites équivalentes sont de même nature.
- Équivalents usuels en 0.

∗ Techniques :

- Étude de monotonie :
  a) Signe de $u_{n+1} - u_n$.
  b) Pour une suite strictement positive : position de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.
  c) Lien avec la monotonie de f si $u_{n+1} = f(u_n)$.
- $(u_n)_n$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_n$ est majorée.
- Étude de convergence :
  a) $(u_n)_n$ converge vers 0 si et seulement si $(|u_n|)_n$ converge vers 0.
  b) $(u_n)_n$ converge vers ℓ si et seulement si $(|u_n - \ell|)_n$ converge vers 0.
- Étude de limites :
  a) Opérations sur les limites, sinon "forme indéterminée".
  b) Croissances comparées.
  c) Recherche d'équivalent.
  d) Développement limité.
- Raisonnement par récurrence, adapté en particulier aux suites définies par une relation de récurrence.

2. Suites usuelles

∗ Définitions :

- Suites arithmétiques, raison r.
- Suites géométriques, raison q.
- Suites arithmético-géométriques.
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2, équation caractéristique.

∗ Propriétés, théorèmes :

- Suite arithmétique : terme général, somme de termes consécutifs.
- Suite géométrique : terme général, somme de termes consécutifs ($q \neq 1$ ou $q = 1$).
- Suite arithmético-géométrique : obtention du point-fixe ℓ, suite auxiliaire géométrique.
- Expression d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 grâce aux racines réelles ou complexes de l'équation caractéristique.
- Limite de q^n selon les valeurs de q.

3. Sommes, séries, produits

∗ Définitions :

- Sommes usuelles : arithmétiques, géométriques, télescopiques, du binôme.
- Produit d'entiers consécutifs : la factorielle.
- Série de terme général u_n, somme partielle de rang n.
- Série convergente ou divergente, somme d'une série convergente.
- Série absolument convergente.
- Séries usuelles :

  a) géométrique, ou dérivée première ou seconde. Convergence ssi $|q| < 1$.

  b) exponentielle. Convergence pour tout $x \in \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

  c) télescopique. Convergence selon la nature de $(u_n)_n$.

  d) harmonique. Série divergente.

  d) $\sum \frac{1}{n^2}$. Série convergente.

∗ Propriétés, théorèmes :

- Somme des carrés d'entiers consécutifs.
- Linéarité des sommes, et des sommes de séries convergentes.
- Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim u_n = 0$. Critère de divergence grossière.
- si $u_n \geqslant 0$, alors $\sum u_n$ converge ssi les sommes partielles sont majorées.
- Théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.
- Théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs.
- La convergence absolue implique la convergence.

∗ Techniques :

- Changement d'indices dans une somme ou un produit.
- Inversion des sommes dans une somme double rectangulaire ou triangulaire.
- Pour montrer la convergence d'une série, se ramener à des séries usuelles, ou étudier la convergence absolue, en utilisant les théorèmes de comparaison ou d'équivalence.
- Pour le calcul d'une somme ou de la somme d'une série convergente, se ramener à des sommes usuelles. Éventuellement faire apparaître un télescopage :

  a) en suivant les indications de l'énoncé,

  b) en écrivant en extension (avec ...),

  c) en faisant jouer des ruses classiques, du type :
  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ou $\ln(1+\frac{1}{n}) = \ln(n+1) - \ln(n)$.

- Produit d'entiers pairs consécutifs :
  factoriser par 2 dans chaque terme et faire apparaître $2^n \times n!$
- Produit d'entiers impairs consécutifs :
  compléter par les facteurs pairs manquants pour faire apparaître $(2n+1)!$

4. Limites, continuité

∗ Définitions :

- Limite finie ou infinie d'une fonction en $x_0 \in \mathbf{R}$ ou $x_0 = \pm\infty$.
- Continuité en $x_0 \in \mathbf{R}$. Continuité sur un intervalle réel I. Ensemble $\mathcal{C}^0(I)$.
- Prolongement par continuité en $x_0 \notin \mathcal{D}_f$.
- $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g)$, $\quad f \underset{x_0}{\sim} g$.

∗ Propriétés, théorèmes :

- Limites des fonctions usuelles aux extrémités de leurs ensembles de définition.
- Toutes les fonctions usuelles sont continues sur leurs ensembles de définition, sauf la fonction partie entière.
- Opérations sur les limites, sur les fonctions continues.
- Croissances comparées.
- Unicité de la limite si elle existe.

- Théorème de la limite monotone.
- Théorème des gendarmes.
- Théorème de comparaison.
- Passage à la limite dans des inégalités.
- Deux fonctions équivalentes en x_0 y ont le même comportement.
- Équivalents usuels en 0, équivalents en $\pm\infty$ des fonctions polynomiales.
- Théorème des bornes.
- Théorème des valeurs intermédiaires.
- Théorème de la bijection continue.

∗ Techniques :

- Chercher d'abord à appliquer les règles d'opérations pour déterminer une limite.
- En cas de forme indéterminée, chercher à utiliser par ordre de priorité :
  a) les croissances comparées,
  b) un équivalent,
  c) un DL.
- Se ramener en 0 pour étudier une limite problématique en $x_0 \neq 0$:
  en posant $t = x - x_0$ si $x_0 \in \mathbf{R}$
  en posant $t = \frac{1}{x}$ si $x_0 = \pm\infty$
- Si $f(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x < a \\ h(x) \text{ si } x \geqslant a \end{cases}$ avec g, h des fonctions usuelles (hors partie entière), alors f est continue **par opérations** sur $\mathbf{R} \setminus \{a\}$. Faire l'étude de la continuité en a séparément si nécessaire.

5. Dérivabilité

∗ Définitions :

- Dérivabilité de f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, nombre dérivé. Dérivabilité sur un intervalle réel I.
- Classes de fonctions, ensembles $\mathcal{C}^n(I)$, $\mathcal{C}^\infty(I)$.
- Notations : $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $\ldots$, $f^{(n)}$ est la n-ème dérivée de f.

∗ Propriétés, théorèmes :

- La dérivabilité entraîne la continuité (et non le contraire !)
- Les fonctions usuelles sont dérivables (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur leurs ensembles de définition sauf les fonctions partie entière, valeur absolue (en 0) et racines n-èmes (en 0).
- f dérivable en x_0 ssi $\mathcal{C}_f$ admet une tangente non verticale en x_0. Équation des tangentes.
- Opérations sur les fonctions dérivables.
- Théorème de Rolle.
- Théorème (égalité) des accroissements finis, inégalité des accroissements finis.
- Lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation des fonctions.

∗ Techniques :

- Chercher à factoriser f' pour étudier son signe ! Tableau de signes si nécessaire.
- Si le signe de f' ne s'obtient pas facilement, déterminer f'' et en déduire les variations de f'. Un tableau de variations de f' peut parfois donner son signe.
- Ne jamais développer le carré au dénominateur dans la dérivée d'un quotient.
- Si les règles opératoires ne s'appliquent pas, étudier la limite du taux d'accroissement en x_0 pour savoir si f est dérivable en x_0.
- Si $f(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x < a \\ h(x) \text{ si } x \geqslant a \end{cases}$ avec g, h des fonctions dérivables, alors f est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{a\}$.
  Faire l'étude de la dérivabilité en a séparément si nécessaire.

6. Analyse asymptotique

∗ Définitions :

- Développement limité à l'ordre n (DL_n) de f en x_0.

∗ Propriétés, théorèmes :

- Unicité d'un DL, s'il existe.

• Lien avec la parité des fonctions.
• f admet un DL_0 en x_0 ssi f est continue en x_0.
• f admet un DL_1 en x_0 ssi f est dérivable en x_0.
• Opérations sur les DL.
• Théorème de Taylor-Young.
• DL usuels en 0.

∗ Techniques :
• Se ramener en 0 pour étudier un DL en $x_0 \neq 0$:
en posant $t = x - x_0$ si $x_0 \in \mathbf{R}$
en posant $t = \frac{1}{x}$ si $x_0 = \pm\infty$ [développement asymptotique]
• Déduire d'un DL_n $(n \geqslant 2)$ en x_0 l'équation d'une tangente en x_0, et les positions relatives entre $\mathcal{C}_f$ et cette tangente.

7. Intégration sur un segment

∗ Définitions :
• Si $f \in \mathcal{C}^0\big([a,b]\big)$, alors $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a,b]$.
• Interprétation en terme d'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$.
• Valeur moyenne d'une fonction continue sur $[a,b]$.

∗ Propriétés, théorèmes :
• Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.
• Théorème fondamental de l'analyse.
• Réarrangement des bornes lorsque $a > b$.
• Linéarité de l'intégrale.
• Relation de Chasles.
• Croissance (positivité) de l'intégrale.
• Inégalité triangulaire.
• Théorème de la moyenne.
• Primitives usuelles.

∗ Techniques :
• Toujours commencer par essayer d'intégrer "à vue". Bien reconnaître les primitives usuelles.
• Intégration par parties.
Par ordre de priorité : dériver ln, dériver t^n. Penser éventuellement à écrire $f(t) = 1 \times f(t)$.
• Changement de variables. S'il n'est pas simple, il est donné par l'énoncé.
• Détermination d'une limite d'une somme en reconnaissant une somme de Riemann.

8. Équations différentielles linéaires (EDL)

∗ Définitions :
• (E) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(t)y^{(k)}(t) = b(t)$ est une EDL_n d'inconnue la fonction y de la variable réelle t.
Les fonctions continues a_k sont les coefficients de (E), la fonction continue b est le second-membre de (E).
• EDL homogène, EDLH associée à une EDL.
• Équation caractéristique d'une EDL_2 à coefficients constants.
• Conditions initiales d'une EDL.

∗ Propriétés, théorèmes :
• Théorème de structure pour l'ensemble-solution d'une EDL.
• Principe de superposition pour une solution particulière d'une EDL.
• Ensemble-solution d'une EDL_1 à coefficients constants.
• Ensemble-solution d'une EDL_2 à coefficients constants, obtenu grâce aux racines réelles ou complexes de son équation caractéristique.
• Théorème de Cauchy, appliqué à une EDL_n avec conditions initiales, pour $n = 1$ ou $n = 2$.

∗ Techniques :
• Bien repérer le type d'EDL. Distinguer les EDL homogènes et non homogènes.

• Si le second membre est constant, chercher une solution particulière constante.
• Penser à séparer le second membre en une somme et appliquer le principe de superposition.
• Méthode de variation de constante pour une EDL_1 à coefficients non constants.
• Pour une ED non linéaire, suivre les indications de l'énoncé.

9. Intégrales généralisées
∗ Définitions :
• L'intégrale $\displaystyle\int_I f$ est généralisée (impropre) lorsque I n'est pas un segment $[a, b]$.
• Intégrale faussement généralisée.
• Convergence ou divergence d'une intégrale généralisée : limites d'une primitive F.

$$\int_{[a,b[} f = \lim_{x\to b} F(x) - F(a) \qquad \int_{]a,b]} f = F(b) - \lim_{x\to a} F(a) \qquad \int_{]a,b[} f = \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(a)$$

• Cas où f est continue sur I sauf en un nombre fini de points.
• Intégrale généralisée absolument convergente.
• Intégrale de Gauss.
∗ Propriétés, théorèmes :
• Linéarité, croissance (positivité), relation de Chasles pour les intégrales convergentes.
• Théorème de comparaison pour les fonctions positives.
• Théorème d'équivalence pour les fonctions positives.
• La convergence absolue entraîne la convergence.
∗ Techniques :
• Savoir repérer les extrémités de I en lesquels l'intégrale est généralisée.
• Si l'intégrale est généralisée aux 2 extrémités, traiter séparément les questions de convergence.
• Intégration par parties.
• Changement de variables.
• Utilisation de la parité (imparité) de f pour le calcul d'une intégrale généralisée convergente sur un intervalle centré.

10. Complexes, trigonométrie
∗ Définitions :
• Fonctions sinus, cosinus, tangente, Arctangente. Nombres $\text{Arccos}(x), \text{Arcsin}(x)$.
• Ensemble des nombres complexes, opérations dans $\mathbf{C}$.
• Conjugué, module, arguments d'un complexe.
• Forme algébrique ou trigonométrique (exponentielle) d'un complexe, notation d'Euler.
∗ Propriétés, théorèmes :
• $|\sin| \leqslant 1,\ |\cos| \leqslant 1,\ \cos^2 + \sin^2 = 1$
• Relations de symétrie (parité...) et périodicité de sinus, cosinus et tangente.
• Valeurs remarquables.
• Formules de trigonométrie pour cos et sin : addition, duplication, linéarisation de $\cos^2, \sin^2$.
• Dérivées de $\cos, \sin, \tan, \text{Arctan}$ et composées.
• Équivalents en 0 de $\cos -1, \sin, \tan, \text{Arctan}$. DL_n en 0 de cos et sin.
• Limites en $\pm\infty$ d'Artangente, asymptotes à sa courbe.
• Propriétés opératoires du conjugué et du module dans $\mathbf{C}$.
• Inégalité triangulaire dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
• Formules d'Euler, formule de Moivre.
∗ Techniques :
• Résolution d'équations du second degré dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, relations coefficients-racines.
• Résolution de $z^n = a$ dans $\mathbf{C}$.
• Calcul de sommes trigonométriques vues comme parties réelles ou imaginaires de sommes complexes géométriques ou du binôme.
• Linéarisation de $\cos^p \times \sin^q$, anti-linéarisation de $\cos(nt), \sin(nt)$.
• Transformation de Fresnel.

11. Polynômes
    * Définitions :
        - Polynômes d'indéterminée X à coefficients dans $\mathbf{K}$. Ensemble $\mathbf{K}[X]$.
        - Degré, monôme dominant, coefficient dominant. Ensembles $\mathbf{K}_n[X]$.
        - Opérations sur les polynômes (somme, produit, composée, dérivée).
        - Racine d'un polynôme, ordre de multiplicité d'une racine.
        - Divisibilité dans $\mathbf{K}[X]$.
        - Polynôme scindé.
    * Propriétés, théorèmes :
        - $\mathbf{K}[X]$ est un espace vectoriel, $\mathbf{K}_n[X]$ sont des sous espaces vectoriels.
        - Degré d'une somme de polynômes, d'un produit, d'une composée, d'une dérivée.
        - α est racine de P ssi P se factorise par $(X-\alpha)$.
        - Caractérisation d'une racine α de multiplicité m.
        - Théorème de D'Alembert-Gauss.
        - Racine complexe α d'un polynôme de $\mathbf{R}[X]$.
          Factorisation par $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2$.
    * Techniques :
        - Identification des coefficients dans une égalité de polynômes.
        - Analyse des degrés ou des monômes dominants dans une égalité portant sur des polynômes.
        - Repérer les racines évidentes pour factoriser un polynôme.
        - Étudier les dérivées successives d'un polynôme pour trouver la multiplicité d'une racine α.
        - Poser $T = X^2$ pour factoriser un polynôme qui ne possède que des puissances paires.
        - Résoudre un système somme/produit à l'aide du trinôme $X^2 - SX + P$.

12. Fonctions de 2 variables
    * Définitions :
        - Pavé de $\mathbf{R}^2$, pavé ouvert.
        - Nappe d'une fonction $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$.
        - Courbes de niveau d'une nappe.
        - Distance dans $\mathbf{R}^2$.
        - Limite de f en $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Continuité.
        - Dérivées partielles, d'ordre 1 ou 2. Gradient.
        - Fonction de classe $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2$.
        - Extremum local. Point critique.
    * Propriétés, théorèmes :
        - Opérations sur les dérivées partielles. Dérivées partielles de composées.
        - Approximation à l'ordre 1 d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un pavé ouvert de $\mathbf{R}^2$.
          Lien avec le plan tangent à la nappe représentative.
        - Le gradient s'annule en tout extremum local d'une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un pavé ouvert.
        - Théorème de Schwarz : si $f \in \mathcal{C}^2$, les dérivées partielles d'ordre 2 commutent.
        - Approximation à l'ordre 2 d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un pavé ouvert de $\mathbf{R}^2$.
    * Techniques :
        - Déterminer des dérivées partielles.
        - Déterminer un gradient.
        - Déterminer l'équation d'un plan tangent à une nappe $\mathcal{C}^1$.
        - Déterminer des points critiques.
        - Étude d'un point critique par étude du signe de $f(x,y) - f(x_0, y_0)$.

Partie II : Algèbre

1. <u>Systèmes linéaires</u>

   ∗ Définitions :
   - Système linéaire, coefficients principaux, second membre, système homogène.
   - Système compatible, ensemble-solution d'un système linéaire.
   - Opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire.
   - Équations auxiliaires, variables (inconnues) libres.
   - Pivot d'un système, rang d'un système. Système carré, système de Cramer.
   - Déterminant d'un système carré de taille 2.

   ∗ Propriétés, théorèmes :
   - Soit (S) un système linéaire de taille $n \times p$ (n équations, p inconnues) et de rang r.

   Alors : **a)** $r \leqslant n$ et $r \leqslant p$.

   b) si $r = n$, alors (S) est compatible.
   Sinon, il possède $(n - r)$ équations auxiliaires.

   c) si $r = p$ et (S) compatible, alors (S) possède une unique solution.
   Si $r < p$, il possède $(p - r)$ variables libres.

   d) si $r = n = p$, alors il est de Cramer et possède une unique solution.
   - Un système homogène est toujours compatible.
   - (S) de taille 2×2 est de Cramer ssi $\det(S) \neq 0$.

   ∗ Techniques :
   - Algorithme du pivot de Gauss. Utiliser en priorité des pivots égaux à 1.
     Ne jamais utiliser un nombre inconnu comme pivot (il pourrait être nul !)
     Distinguer plusieurs cas pour traiter ces nombres inconnus.
   - Savoir écrire convenablement l'ensemble-solution d'un système linéaire.

2. <u>Matrices</u>

   ∗ Définitions :
   - Matrice de taille $n \times p$ à coefficients réels ou complexes. Coefficient $M_{i,j}$.
   - Matrices carrées, matrices colonnes, matrices lignes, matrices scalaires.
   - Matrices triangulaires, diagonales. Matrice-identité I_n.
   - Ensembles $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$.
   - Opérations sur les matrices : somme, produit par un scalaire, produit.
   - Puissances d'une matrice carrée.
   - Matrice inversible.
   - Écriture matricielle d'un système linéaire.
   - Rang d'une matrice.
   - Transposée M^T d'une matrice M.
   - Matrices symétriques, anti-symétriques. Ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$.

   ∗ Propriétés, théorèmes :
   - Propriétés des opérations matricielles.
   - Formule du binôme pour des matrices qui commutent.
   - Inverse d'un produit de matrices inversibles, inverse d'une puissance d'une matrice inversible.
   - M carrée de taille n est inversible ssi $\mathrm{rg}(M) = n$.
   - Inversibilité des matrices 2×2 à l'aide du déterminant, formule de l'inverse.
   - Produits, puissances, inverses de matrices diagonales.
   - Produits, puissances, inverses de matrices triangulaires.
   - Propriétés de la transposition de matrices.

   ∗ Techniques :
   - Le produit matriciel ne commute pas en général ! Vérifier si les tailles sont compatibles.
   - Savoir déterminer le rang d'une matrice par l'algorithme du pivot de Gauss.
   - Savoir déterminer l'inverse d'une matrice inversible par la méthode de son choix.
   - Après le calcul de M^{-1}, penser à vérifier que MM^{-1} (ou $M^{-1}M$) donne bien I_n.

• Déduire d'une relation $P(M) = 0$ où P est un polynôme de terme constant non nul le fait que M est inversible, et trouver une expression de M^{-1} en fonction de M.

3. Espaces vectoriels

∗ Définitions :

• Espace vectoriel $(E, +, .)$, axiomes des opérations somme $(+)$ et produit externe $(.)$
• Vocabulaire : vecteurs, scalaires. Combinaisons linéaires (CL), vecteur nul $\overrightarrow{0}$ ou 0_E ou 0.
• Espaces vectoriels usuels : $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\mathcal{F}(I, \mathbf{R})$, $\mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$.
• Sous-espaces vectoriels. Exemple usuel de $\mathbf{K}_n[X]$.
• Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs : $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
• Famille génératrice, libre (ou liée), base d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace vectoriel.
• Dimension d'un espace vectoriel ou sous-espace vectoriel possédant une base finie.
• Coordonnées d'un vecteur dans une base.
• Bases canoniques de $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{R}_n[X]$, $\mathbf{C}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
• Rang d'une famille finie de vecteurs.
• Matrice d'un vecteur ou d'une famille de vecteurs relativement à une base.
• Matrice de passage entre deux bases.

∗ Propriétés, théorèmes :

• Caractérisation d'un sous-espace vectoriel.
• Une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
• 2 vecteurs forment une famille libre ssi ils ne sont pas colinéaires. FAUX à partir de 3 vecteurs.
• Toute famille contenant $\overrightarrow{0}$ est liée.
• Une famille de polynômes de degrés 2 à 2 distincts et ne contenant pas 0 est libre.
• Liens entre liberté, caracteur générateur, rang et cardinal d'une famille de vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n.
• Dimensions de sous-espaces vectoriels, lien avec l'inclusion.
• Le rang d'une famille de vecteurs est celui de sa matrice relativement à n'importe quelle base.
• $\mathcal{F}$ est une base ssi sa matrice dans n'importe quelle base est inversible.
• Formule de changement de bases pour un vecteur.

∗ Techniques :

• Connaître dimensions et bases canoniques des espaces vectoriels usuels.
• Savoir montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est libre :
  a) $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{card}(\mathcal{F})$
  b) $\mathcal{F}$ est une famille de polynômes non nuls de degrés distincts,
  c) $\mathcal{F}$ est une famille orthogonale de $\mathbf{R}^n$ ne contenant pas $\overrightarrow{0}$,
  d) par définition : si $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k \overrightarrow{u_k} = \overrightarrow{0}$, alors $\forall k \in [\![1, p]\!],\ a_k = 0$.
• Savoir montrer qu'une famille $\mathcal{B}$ est une base de E (espace vectoriel de dimension n) :
  a) si $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ avec $\mathcal{C}$ base de E, on montre que P est inversible,
  b) on montre que $\mathcal{B}$ est libre et $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = n$,
  c) on montre que $\mathcal{B}$ est génératrice et $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = n$,
  d) on montre que $\mathrm{rg}\left(\mathcal{B}\right) = \mathrm{card}(\mathcal{B}) = n$,
  e) on montre que tout vecteur de E est une unique CL des vecteurs de $\mathcal{B}$,
  f) on montre que $\mathcal{B}$ est libre et génératrice.
• Savoir montrer que F est un sous-espace vectoriel de E :
  a) $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de E,
  b) $F \subset E$, $\overrightarrow{0} \in F$ et $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in F$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F$ (stabilité par CL).
• Trouver les coordonnées d'un vecteur u dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$:
  a) on exprime $u = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$: les λ_k sont les coordonnées cherchées,
  b) si on connaît $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$, et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$, on utilise : $X' = P^{-1}X$.

4. Applications linéaires

∗ Définitions :

- Application linéaire (morphisme) entre deux espaces vectoriels E et F.
- Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.
- Ensembles $\mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{L}(E)$.
- Espaces vectoriels isomorphes.
- Noyau et image d'une application linéaire. Notations $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$.
- Rang d'une application linéaire.
- En dimension finie, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ relativement à des bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F.
- Application linéaire $f : \mathbf{K}^p \to \mathbf{K}^n$ canoniquement associée à $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
- Noyau, image d'une matrice.
- Matrices semblables.

∗ Propriétés, théorèmes :

- Si $f : E \to F$ est linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$.
- Caractérisation d'une application linéaire $E \to F$:

$$\forall u \in E,\ f(u) \in F \text{ et } \forall u,v \in E,\ \forall \lambda \in \mathbf{K},\ f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v).$$

- Somme, produit par une constante, composées d'applications linéaires.
- Si f est un isomorphisme, alors f^{-1} est linéaire.
- Bijection réciproque de la composée de 2 isomorphismes.
- Les images directes ou réciproques de sous-espaces vectoriels par des applications linéaires sont des sous-espaces vectoriels.
- f est injective ssi $\mathrm{Ker}(f) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, f est surjective ssi $\mathrm{Im}(f) = F$.
- f est entièrement déterminée par ses images des vecteurs d'une base quelconque de E.
- Théorème du rang.
- Liens entre $\mathrm{rg}(f)$, les dimensions de E, F, et l'injectivité ou la surjectivité de f.
- Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective.
- $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f)$ pour toutes bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F.
- Écriture matricielle de $f(u) = v$: $Y = AX$.
- Correspondance des opérations matricielles et des opérations sur les applications linéaires.
- f bijective $\Leftrightarrow$ A est inversible, et dans ce cas A^{-1} est la matrice de f^{-1} dans les mêmes bases.
- Formule de changement de bases pour un endomorphisme : $A' = P^{-1}AP$.
- Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans 2 bases différentes.

∗ Techniques :

- Reconnaître l'expression d'une application linéaire de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$.
- Savoir déterminer le noyau de f, en résolvant l'équation $f(u) = \overrightarrow{0}$.
- Savoir déterminer le rang de f, en calculant le rang d'une matrice représentant f.
- Savoir utiliser le théorème du rang pour déduire du noyau la dimension de l'image, ou réciproquement.
- Savoir montrer que f est injective :
  a) f endomorphisme en dimension finie et f est surjective,
  b) $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$,
  c) $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$: si $f(u) = 0_F$, alors $u = 0_E$.
- Savoir montrer que f est surjective :
  a) f endomorphisme en dimension finie et f est injective,
  b) $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$,
  c) $\mathrm{Im}(f) = F$: $\forall v \in F,\ \exists u \in E \,|\, f(u) = v$.
- Savoir montrer que f est un isomorphisme :
  a) $\dim(E) = \dim(F)$ et f est injective,
  b) $\dim(E) = \dim(F)$ et f est surjective,
  c) $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(f) = F$,
  d) montrer que : $\forall v \in F,\ \exists! u \in E \,|\, f(u) = v$.
  L'expression de u en fonction de v donne l'expression de f^{-1} car alors $u = f^{-1}(v)$.

5. Diagonalisation

∗ Définitions :

• Éléments propres d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme : vecteur propre (VEP), valeur propre (VAP), espace propre E_λ. Ensemble des VAP : spectre.

• A ou f est diagonalisable ssi il existe une base de VEP.

• Écriture d'un espace propre à l'aide d'un noyau : $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$

ou $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$.

∗ Propriétés, théorèmes :

• Un espace propre est un sous-espace vectoriel de dimension $\geqslant 1$.

• f est diagonalisable ssi $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$.

• A non inversible ssi $0 \in \mathrm{Sp}(A)$, f non bijective ssi $0 \in \mathrm{Sp}(f)$.

• Des VEP associées à des VAP distinctes forment une famille libre.

• f (ou A) possède au maximum n VAP distinctes, et : $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}} E_\lambda \leqslant n$.

• A diagonalisable $\Leftrightarrow A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale,
P étant la matrice de passage de la base canonique vers la base de VEP considérée,
et les coefficients diagonaux de D étant les VAP de A.

• A est diagonalisable ssi elle est semblable à une matrice diagonale.

• f est diagonalisable ssi il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

• CNS de diagonalisabilité : f (ou A) est diagonalisable ssi $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}} E_\lambda = n$.

• CS de diagonalisabilité : si f (ou A) admet n VAP distinctes, alors elle est diagonalisable.
Dans ce cas, tous les espaces propres sont de dimension 1.

• Théorème spectral : si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, alors A est diagonalisable en BON :
$A = PDP^{-1}$ avec $PP^T = I_n$ et les espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux.

∗ Techniques :

• Savoir reconnaître que $f(u) = \lambda u$ avec $u \neq 0$ donne u VEP de f associé à la VAP λ.

• Savoir reconnaître que $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$ donne X VEP de A associé à la VAP λ.

• Lire les VAP d'une matrice diagonale ou triangulaire sur sa diagonale.

• Utiliser le théorème spectral pour une matrice symétrique à coefficients réels.

• Déterminer les VAP en résolvant : $\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{Id}) < n$

ou : $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$

• Savoir étudier un espace propre et en déterminer une base.
Si on trouve $E_\lambda = \{0\}$, alors il y a une erreur !

• Savoir écrire la matrice diagonale D constituée des VAP.

• Savoir constituer la matrice de passage P en juxtaposant des bases des E_λ, et en respectant l'ordre des VAP dans la matrice D.

• Utiliser le déterminant pour trouver rapidement le spectre d'une matrice 2×2.

• Si les sommes des lignes de A sont constantes, poser $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et calculer AX.

• Vérifier la cohérence des résultats en calculant la trace de A.

• Puissances d'une matrice diagonalisable A : preuve par récurrence que $A^k = PD^kP^{-1}$.

• Savoir traduire matriciellement des relations de récurrence linéaires sur des suites, des équations différentielles linéaires ou des systèmes différentiels linéaires.

6. Produit scalaire

∗ Définitions :

• Produit-scalaire $\langle u, v \rangle$ dans $\mathbf{R}^n$, norme $||u||$ d'un vecteur.

• Vecteurs orthogonaux $u \perp v$.

• Écriture matricielle du produit-scalaire : $\langle u, v \rangle = U^T V$.

• Produit scalaire de 2 matrices colonnes. Matrices colonnes orthogonales.

• Famille orthogonale, orthonormale.

- Bases orthogonales, orthonormales de $\mathbf{R}^n$ (BOG, BON).
- Orthogonal $F^{\perp}$ d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^n$.
- Projection orthogonale $p_{_F}$ sur F.
- Distance entre deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$.
- Distance d'un vecteur u à un sous-espace vectoriel F.

∗ Propriétés, théorèmes :
- Propriétés du produit-scalaire : symétrie, bilinéarité, positivité, définition.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz. Cas d'égalité.
- Propriétés de la norme, absolue homogénéité, inégalité triangulaire.
- Théorème de Pythagore.
- Toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.
- La base canonique de $\mathbf{R}^n$ est une BON.
- La matrice de passage P entre deux BON vérifie : $PP^T = I_n$.
- $p_{_F} \circ p_{_F} = p_{_F}$, $\mathrm{Im}(p_{_F}) = F$ et $\mathrm{Ker}(p_{_F}) = F^{\perp}$.
- $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = n$.
- Expression de $p_{_F}$ grâce à une BOG (ou BON) de F.
- Propriétés de la distance dans $\mathbf{R}^n$.
- $d(u, F) = ||u - p_{_F}(u)||$.

∗ Techniques :
- Savoir faire un schéma dans $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ pour illustrer une situation dans $\mathbf{R}^n$.
- Savoir normaliser un vecteur en divisant par sa norme.
- Savoir construire une BON d'un sous-espace vectoriel à partir d'une base quelconque.

Partie III : Probabilités

1. Dénombrement

   ∗ Définitions :
   - Unions, intersections de parties $A, B, \ldots$ d'un ensemble E.
   - Cardinal d'un ensemble fini A. Notation $\mathrm{card}(A)$ ou $\#A$.
   - Ensemble infini dénombrable, ensemble infini non dénombrable.
   - Complémentaire d'une partie A de E, notée $\overline{A}$ ou $E \setminus A$.
   - Produit cartésien de 2 ensembles E et F. Notation $E \times F$.
   - p-liste d'un ensemble de cardinal n : liste ordonnée de longueur p, avec répétitions possibles.
   - p-arrangement : liste ordonnée sans répétition. Nombre de p-arrangements A_n^p.
   - Permutation : arrangement de longueur maximale ($p = n$).
   - p-combinaison : liste non ordonnée sans répétition. Nombre de p-combinaisons : $\binom{n}{p}$.
   - Ensemble des parties d'un ensemble, notation $\mathcal{P}(E)$.

   ∗ Propriétés, théorèmes :
   - Si $A \cap B = \varnothing$, alors $\#(A \cup B) = \#A + \#B$. Sinon, $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.
   - $\#(\overline{A}) = \#E - \#A$.
   - $\#(E \times F) = (\#E) \times (\#F)$.
   - Le nombre de p-listes est : n^p.
   - Le nombre de p-arrangements est : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leqslant n$, et 0 si $p > n$.
   - Le nombre de permutations est : $A_n^n = n!$
   - Le nombre de p-combinaisons est : $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \leqslant n$, et 0 si $p > n$.
   - $\#\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^n$.
   - Expression du coefficient binomial $\dbinom{n}{p}$ quand $p = 0, 1, 2$.
   - Formule de symétrie des coefficients binomiaux.
   - Formule de Pascal : $\dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1} = \dbinom{n+1}{p+1}$.
   - Lemme du pion : $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$ si $p \geqslant 1$.

2. Bases des probabilités

   ∗ Définitions :
   - Expérience aléatoire, univers, issue, événement.
   - Événement élémentaire, (quasi)-impossible, (quasi)-certain.
   - Événement contraire, événements incompatibles (disjoints).
   - Système (quasi)-complet d'événements : S(Q)CE.
   - Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$.
   - Axiome des probabilités : $\mathbf{P} : \mathcal{T} \to [0,1]$, $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ et σ-additivité.
   - Probabilité uniforme (équiprobabilité) sur un univers fini : $\mathbf{P}(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega}$.
   - Probabilité conditionnelle : $\mathbf{P}_B(A) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$. Notation alternative $\mathbf{P}(A \,|\, B)$.
   - Événements indépendants, mutuellement indépendants.

   ∗ Propriétés, théorèmes :
   - Propriétés des probabilités : $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$, $A \subset B \Rightarrow \mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$,
     $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.
   - Formule des probabilités composées (FPC).
   - Formule des probabilités totales (FPT) associée à un S(Q)CE.
   - Formule de Bayes.

   ∗ Techniques :

• Utiliser la FPT pour illustrer une disjoinction de cas.
• Savoir justifier la convergence d'une série obtenue par la FPT en invoquant la σ-additivité.
• Lors d'une succession d'expériences aléatoires, exprimer les probabilités au rang $(n+1)$ en fonction des probabilités au rang n grâce à la FPT portant sur un S(Q)CE du rang n. Faire émerger des relations de récurrence.
• Simplifier la FPC lorsque les événements sont indépendants.

3. Variables aléatoires (VAR)

∗ DÉFINITIONS :
  • $X : \Omega \to \mathbf{R}$ variable aléatoire réelle. Univers-image $X(\Omega)$.
  • Notation des événements : $[X \in I]$, $[X \leqslant a]$, $[a < X \leqslant b]$, etc
  • Fonction de répartition : $\forall x \in \mathbf{R},\ F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$.
  • Indépendance de 2 VAR, indépendance mutuelle d'une suite de VAR.
  • Moment d'ordre 1 : espérance. VAR centrée.
  • Moment centré d'ordre 2 : la variance.
  • Écart-type, VAR réduite. VAR $X^\star$ centrée-réduite associée à X.

∗ PROPRIÉTÉS, THÉORÈMES :
  • Propriétés des fonctions de répartition : croissance, limites en $\pm\infty$.
  • Deux VAR ayant même fonction de répartition suivent la même loi.
  • Si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment à tout ordre $s \leqslant r$.
  • Linéarité de l'espérance, sous réserve de convergence.
  • Théorème de König-Huygens.
  • $\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$, sous réserve de convergence.
  • Lemme des coalitions.

∗ TECHNIQUES :
  • Obtenir la loi d'un maximum M de VAR X, Y indépendantes :
    $\forall x \in \mathbf{R},\ [M \leqslant x] = [X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x]$ donc en passant aux probabilités et par indépendance
    $\forall x \in \mathbf{R},\ F_M(x) = F_X(x) \times F_Y(x)$.
  • Obtenir la loi d'un minimum m de VAR X, Y indépendantes :
    $\forall x \in \mathbf{R},\ [m > x] = [X > x] \cap [Y > x]$ donc en passant aux probabilités et par indépendance
    $\forall x \in \mathbf{R},\ 1 - F_m(x) = \big(1 - F_X(x)\big) \times \big(1 - F_Y(x)\big)$.
  • Généralisation de ces méthodes dans le cas de n VAR mutuellement indépendantes.

4. VAR discrètes

∗ DÉFINITIONS :
  • $X : \Omega \to \mathbf{R}$ variable aléatoire réelle est discrète si l'univers-image $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
    Dans ce cas, $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ avec $I = [\![0, n]\!]$ ou $I = \mathbf{N}$.
  • S(Q)CE lié à une VAR discrète X d'univers-image $\{x_i,\ i \in I\}$: $\big([X = x_i]\big)_{i \in I}$.
  • Loi d'une VAR discrète : $\mathbf{P}(X = x_i)$ pour tout $i \in I$.
  • F_X est discontinue en x ssi $x \in X(\Omega)$.
  • Espérance : convergence absolue de $\displaystyle\sum_{i \in I} x_i\, \mathbf{P}(X = x_i)$.
  • Moment d'ordre $r \in \mathbf{N}$: convergence absolue de $\displaystyle\sum_{i \in I} (x_i)^r\, \mathbf{P}(X = x_i)$.
  • VAR discrètes usuelles : certaine, uniforme, de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

∗ PROPRIÉTÉS, THÉORÈMES :
  • $\displaystyle\sum_{i \in I} \mathbf{P}(X = x_i) = 1$. Il s'agit d'une somme finie, ou de la somme d'une série convergente.
  • Théorème de transfert :
    $Y = g(X)$ admet une espérance ssi $\displaystyle\sum_{i \in I} g(x_i)\mathbf{P}(X = x_i)$ converge absolument.
  • Espérance, variance des lois usuelles.
  • Propriétés des VAR discrètes usuelles.

∗ Techniques :

- Vérifier qu'une formule $\mathbf{P}(X = x_i) = p_i$ donnée est la loi d'une VAR discrète :
  - ∗ on montre que : $\forall i,\ p_i \geqslant 0$,
  - ∗ on montre que : $\displaystyle\sum_i p_i = 1$ (somme finie ou somme d'une série convergente).
- Reconnaître une loi de Bernoulli lorsque $X(\Omega) = \{0, 1\}$. Dans ce cas, $p = \mathbf{P}(X = 1)$.
- Reconnaître une loi binomiale : nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli, indépendantes, et de même paramètre p.
- Reconnaître une loi géométrique : rang du premier succès lors de la répétition d'une infinité d'épreuves de Bernoulli, indépendantes, et de même paramètre p.
- Si $X(\Omega) \subset \mathbf{N}$, alors : $\forall k \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1)$
$$= \mathbf{P}(X \geqslant k) - \mathbf{P}(X \geqslant k+1)$$
  On obtient ainsi la loi de X grâce à sa fonction de répartition, ou sa fonction de survie.
- Existence de l'espérance de X :
  - ∗ si $X(\Omega)$ est fini, alors X admet une espérance et $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i \mathbf{P}(X = x_i)$.
  - ∗ si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, alors X admet une espérance ssi $\displaystyle\sum_{i\in\mathbf{N}} x_i \mathbf{P}(X = x_i)$ converge absolument. Dans ce cas, $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\sum_{i\in\mathbf{N}} x_i \mathbf{P}(X = x_i)$.
- Existence de la variance de X : utiliser König-Huygens.
  - ∗ si $X(\Omega)$ est fini, alors X admet un moment d'ordre 2 : $\mathbf{E}(X^2) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (x_i)^2 \mathbf{P}(X = x_i)$.
  - ∗ si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, alors X admet un moment d'ordre 2 ssi $\displaystyle\sum_{i\in\mathbf{N}} (x_i)^2 \mathbf{P}(X = x_i)$ converge (absolument). Dans ce cas, $\mathbf{E}(X^2) = \displaystyle\sum_{i\in\mathbf{N}} (x_i)^2 \mathbf{P}(X = x_i)$.

5. VAR à densité

∗ Définitions :

- Densité de probabilité. X admet une densité f_X ssi $x \in \mathbf{R},\ F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$.
- Espérance : convergence absolue de $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} t\, f_X(t)\,\mathrm{d}t$.
- Moment d'ordre $r \in \mathbf{N}$: convergence absolue de $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} t^r\, f_X(t)\,\mathrm{d}t$.
- Lois usuelles à densité : uniforme sur $[a, b]$, loi exponentielle, lois normales.

∗ Propriétés, théorèmes :

- Pour une VAR X de densité f_X et I intervalle réel : $\mathbf{P}(X \in I) = \displaystyle\int_I f_X(t)\,\mathrm{d}t$.
  En particulier : $\forall a \in \mathbf{R},\ \mathbf{P}(X = a) = 0$.
- X admet une densité ssi F_X est continue sur $\mathbf{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. On trouve alors une densité de X en dérivant F_X.
- Théorème de transfert :
  $Y = g(X)$ admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.
- Moments des lois usuelles à densité.
- Propriétés des VAR à densité usuelles.

∗ Techniques :

- Montrer que f est une densité de probabilité :
  - ∗ f est positive ou nulle sur $\mathbf{R}$.
  - ∗ f est continue sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
  - ∗ $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.
- Pour étudier $Y = f(X)$, avec X une VAR à densité, on détermine l'univers-image de Y.

S'il est fini ou dénombrable, alors Y est une VAR discrète.

Sinon, on détermine la fonction de répartion F_Y de Y. Si elle est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors Y admet une densité. Sinon, on sort du cadre du programme de BCPST.

- X admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} t f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.
- X admet un moment d'ordre 2 ssi $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} t^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge (absolument).

  Dans ce cas, et on utilise König-Huygens pour trouver la variance de X.
- Si X, Y sont indépendantes et à densité, alors $X+Y$ admet une densité, donnée par le produit de convolution de f_X et f_Y :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_{X+Y}(x) = \int_{\mathbf{R}} f_X(x-t) f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} f_X(t) f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Savoir identifier l'intervalle où le produit $f_X(x-t)f_Y(t)$ est non nul, en distinguant éventuellement des cas selon la valeur de x.

6. Couples de VAR discrètes

∗ Définitions :

- Couple (X, Y) de VAR discrètes. Loi conjointe du couple, lois marginales.
- Loi conditionnelle de X sachant Y.
- Covariance d'un couple de VAR discrètes.
- VAR corrélées, non corrélées.
- X, Y indépendantes ssi la loi conjointe est le produit des lois marginales.

∗ Propriétés, théorèmes :

- Théorème de transfert pour un couple de VAR finies :

  $\mathbf{E}\big(g(X,Y)\big) = \displaystyle\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} g(x_i, y_i)\mathbf{P}(X = x_i,\, Y = y_i).$
- Formule de König-Huygens pour la covariance.
- Propriétés de la covariance : symétrie, bilinéarité. $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X)$.
- Variance d'une somme.
- L'indépendance implique la non-corrrélation.
- Pour des VAR indépendantes : espérance du produit, variance de la somme.

∗ Techniques :

- Savoir déterminer les lois marginales à partir d'une loi conjointe, en utilisant un S(Q)CE.
- Savoir retrouver une loi marginale à partir d'une loi conditionnelle et de l'autre loi marginale.
- Savoir calculer $\mathbf{E}(XY)$ pour des VAR finies : $\mathbf{E}\big(XY\big) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} x_i \times y_i \times \mathbf{P}(X = x_i,\, Y = y_i).$

  En déduire la covariance du couple (X, Y) grâce au théorème de König-Huygens.
- Si on connaît les variances de X, de Y et de $X+Y$, savoir en déduire la covariance de (X, Y).
- Savoir montrer que X, Y sont indépendantes :

$$\forall (i,j) \in I \times J, \quad \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbf{P}(X = x_i) \times \mathbf{P}(Y = y_j).$$

- Savoir montrer que X, Y ne sont pas indépendantes :

$$\exists (i,j) \in I \times J, \quad \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) \neq \mathbf{P}(X = x_i) \times \mathbf{P}(Y = y_j).$$

7. Théorèmes limites

∗ Définitions :

- Moyenne empirique d'une suite de VAR.
- Convergence en loi pour une suite de VAR.
- Variance et écart-type empirique.
- Intervalle de confiance au seuil de confiance $(1-\alpha)$.
- Intervalle de fluctuation au seuil $(1-\alpha)$.

∗ Propriétés, théorèmes :

- Inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev.

• Loi faible des grands nombres pour la moyenne empirique d'une suite de VAR indépendantes, de même loi, admettant une variance.

• Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

• Théorème central-limite (TCL) première forme.

• Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.

• Théorème central-limite (TCL) deuxième forme.

• Test de conformité à une moyenne.

• Test de conformité à une proportion.

∗ Techniques :

• Utiliser Bienaymé-Tchebychev pour :

∗ majorer la probabilité de $[\,|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon]$,

∗ minorer la probabilité de $[\,|X - \mathbf{E}(X)| < \varepsilon]$,

• Utiliser le TCL pour faire des approximations. Si $(X_k)_{k\geqslant 1}$ sont indépendantes, suivent une même loi de moyenne μ et d'écart-type σ, alors pour $n \geqslant 30$:

∗ $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$ approximativement,

∗ $(S_n)^\star = \dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ approximativement,

∗ $M_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$ approximativement,

∗ $(M_n)^\star = \dfrac{M_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ approximativement.