G2E - 2025 (4h)

Pb 1 - Partie A

1a $S = X+Y+Z+T$.

- Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X) + \dots + \mathbb{E}(T)$

$$\boxed{\mathbb{E}(S) = x+y+z+t}$$

- Par indépendance de X, Y, Z, T : $\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}(X) + \dots + \mathbb{V}(T)$

$$\boxed{\mathbb{V}(S) = x(1-x) + y(1-y) + z(1-z) + t(1-t)}$$

1b $P(\Omega) = \{0,1\}$

donc $\boxed{P \hookrightarrow \mathcal{B}(\alpha)}$ où $\alpha = \mathbb{P}(P=1)$

$[P=1] = [X=1, Y=1, Z=1, T=1]$ donc par indépendance :

$$\mathbb{P}(P=1) = \mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Y=1)\times\mathbb{P}(Z=1)\times\mathbb{P}(T=1)$$
$$= xyzt$$

ccl : $\boxed{P \hookrightarrow \mathcal{B}(xyzt)}$

2a $M(\Omega) = N(\Omega) = \{0,1\}$ donc M et N suivent des lois de Bernoulli.

$[M=0] = [X=0, Y=0, Z=0, T=0]$ donc par indépendance :

$$\mathbb{P}(M=0) = \mathbb{P}(X=0)\times\mathbb{P}(Y=0)\times\mathbb{P}(Z=0)\times\mathbb{P}(T=0)$$
$$= (1-x)(1-y)(1-z)(1-t)$$

et $\mathbb{P}(M=1) = 1 - \mathbb{P}(M=0)$ donc $\boxed{M \hookrightarrow \mathcal{B}\big(1-(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)\big)}$

$[N=1] = [X=1, Y=1, Z=1, T=1] = [P=1]$

On a donc $\boxed{N = P}$ donc $\boxed{N \hookrightarrow \mathcal{B}(xyzt)}$.

2b
- Cadre usuel : $x, y, z, t \in]0,1[$.

Dans ce cas : $[M=0, N=1] = \emptyset$ donc $\mathbb{P}(M=0, N=1) = 0$
alors que $\mathbb{P}(M=0)$ et $\mathbb{P}(N=1)$ sont non nuls, donc $\boxed{\text{M et N ne sont pas indépendants.}}$

- Dans le sujet, on autorise x, y, z, t à être égaux à 0 ou à 1.

$\mathcal{B}(0)$ est une loi certaine de valeur 0
$\mathcal{B}(1)$ ———— 1.

Si parmi x, y, z, t l'un au moins est nul, alors $[N=0]$ est toujours réalisé, donc M et N sont indépendants.

De même, si parmi x, y, z, t l'un au moins vaut 1, alors $[M=1]$ est toujours réalisé, et M et N sont indépendants.

On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{M et N ne sont pas indépendants si et seulement si } x, y, z, t \in]0,1[.}$$

Pb 1 - Partie B

3a $\forall i \in [\![1,n]\!]$, on note :

X_i : " l'expérience menée par Xavière sur le $i^{ème}$ échantillon est non concluante".
Y_i : " ——— Yasmine ——— "
Z_i : " ——— Zélie ——— "
T_i : " ——— Tina ——— "

Alors : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $A_i = X_i \cap Y_i \cap Z_i \cap T_i$

et ces événements sont supposés indépendants, donc :

$$\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(X_i) \times \mathbb{P}(Y_i) \times \mathbb{P}(Z_i) \times \mathbb{P}(T_i)$$

Ccl : $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(A_i) = xyzt}$

3b $S = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$ est le nombre d'échantillons pour lesquels les 4 expériences sont non concluantes.

S est le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli, indépendantes, et de même paramètre $xyzt$.

Ccl : $\boxed{S \hookrightarrow \mathcal{B}(n, xyzt)}$.

3c $\mathbb{P}(S=1) = \binom{n}{1} (xyzt)^1 (1-xyzt)^{n-1}$

Ccl. $\boxed{\mathbb{P}(S=1) = nxyzt(1-xyzt)^{n-1}}$.

4a $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{B_i}$ est le nombre d'échantillons pour lesquels au moins une des 4 expériences n'a pas été concluante.

4b On demande $\mathbb{P}(\sigma \leq \frac{n}{2})$:

on pose $\beta = 1 - (1-x)(1-y)(1-z)(1-t)$.

$\sigma \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\beta)$ donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(\sigma \leq \tfrac{n}{2}) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} \beta^k (1-\beta)^{n-k}}$$

Pb1 - Partie C

5a Si $[Y=Z]$ est réalisé, alors $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable.

5b
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=Z) &= \mathbb{P}(Y=0, Z=0) + \mathbb{P}(Y=1, Z=1) \\ &= \mathbb{P}(Y=0).\mathbb{P}(Z=0) + \mathbb{P}(Y=1).\mathbb{P}(Z=1) \quad \text{par indépendance} \\ &= (1-y).(1-z) + y.z\end{aligned}$$

Ccl : $\boxed{\mathbb{P}(Y=Z) = 1-y-z+2yz}$

6a Si $[Y \neq Z]$ est réalisé, alors parmi Y et Z, l'un vaut 0 (et l'autre vaut 1) donc <u>A est triangulaire</u>.

Dans ce cas, les VAP de A se lisent sur sa diagonale :

$$\boxed{Sp(A) = \{X(\omega), T(\omega)\}}$$

6b $\mathbb{P}(X \neq T \mid Y \neq Z) = \mathbb{P}(X \neq T)$ par indépendance mutuelle de X, Y, Z, T.

$\mathbb{P}(X \neq T) = 1 - \mathbb{P}(X = T)$ et par analogie avec <u>5b</u> :

$$\boxed{\mathbb{P}(X \neq T \mid Y \neq Z) = x + t - 2xt}$$

7
- Si $[Y=Z]$, alors A est diagonalisable.
- Sinon, si $[X=T]$ alors A n'a qu'une seule VAP sans être diagonale donc A n'est pas diagonalisable, et si $[X \neq T]$ alors A possède 2 VAP distinctes donc A est diagonalisable.

Ainsi, en notant D l'événement "A est diagonalisable" :

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(Y=Z) + \mathbb{P}(Y \neq Z) \times \mathbb{P}(X \neq T \mid Y \neq Z)$$

en appliquant la FPT au SCE : $([Y=Z], [Y \neq Z])$.

$$\boxed{\mathbb{P}(D) = 1 - y - z + 2yz + (y + z - 2yz) \times (x + t - 2xt)}.$$

<u>Pb1 - Partie D</u>

8a $rg(A) = 1$ donc A n'est pas inversible, donc $\boxed{u \text{ n'est pas bijectif}}$.

8b $rg(B) = 2$ donc B est inversible donc $\boxed{u' \text{ est bijectif.}}$

8c Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. $\lambda \in Sp(A) \iff rg(A - \lambda I_2) \leq 1 \iff \lambda = 0$ ou $\lambda = 2$.

<u>Étude de $E_0(A)$</u> : $E_0(A) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. on pose $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases}$

<u>Étude de $E_2(A)$</u> : $E_2(A) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

on pose $\boxed{e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)}$ et $\boxed{e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)}$ $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$

$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une BON de $\mathbb{R}^2$ et $\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(u) = D}$.

8d On calcule $u'(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} u'(1,-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) = -e_1$

$$u'(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} u'(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = e_2$$

Conclusion : $\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(u') = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

9a Soit $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $v^3 + v = u$.

alors : $\left.\begin{array}{l} u \circ v = \cancel{\ }(v^3+v) \circ v = v^4 + v^2 \\ \text{et } v \circ u = v \circ (v^3+v) = v^4 + v^2 \end{array}\right\}$ donc $\boxed{u \circ v = v \circ u}$.

Alors $u \circ v(e_1) = v \circ u(e_1) = 0$ car $u(e_1) = 0$

donc $v(e_1) \in E_0(u) = \mathrm{Vect}(e_1)$.

Ainsi, $\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid v(e_1) = \lambda e_1$.

$\boxed{e_1 \text{ est VEP de } v \text{ associé à la valeur propre } \lambda.}$

De même : $u \circ v(e_2) = v \circ u(e_2) = v(2e_2) = 2.v(e_2)$

donc $v(e_2) \in E_2(u) = \mathrm{Vect}(e_2)$.

$\exists \mu \in \mathbb{R},\ v(e_2) = \mu . e_2$

$\boxed{e_2 \text{ est VEP de } v \text{ associé à la VAP } \mu.}$

9b . D'une part, $(v^3+v)(e_1) = u(e_1) = 0$

. D'autre part, $(v^3+v)(e_1) = v^3(e_1) + v(e_1)$
$= \lambda^3 e_1 + \lambda e_1 = (\lambda^3+\lambda)e_1$

donc $(\lambda^3+\lambda)e_1 = 0$, avec $e_1 \neq 0$ donc $\boxed{\lambda^3 + \lambda = 0}$.

$\lambda^3 + \lambda = 0 \iff \lambda(\lambda^2+1) = 0 \iff \boxed{\lambda = 0}$ (car $\lambda \in \mathbb{R}$)

. De même, $(v^3+v)(e_2) = u(e_2) = 2e_2$
et $(v^3+v)(e_2) = v^3(e_2) + v(e_2) = \mu^3 e_2 + \mu e_2$

donc $(\mu^3+\mu-2)e_2 = 0$ avec $e_2 \neq 0$ donc $\boxed{\mu^3+\mu-2 = 0}$

On résout en remarquant la racine évidente $\mu = 1$:

$\mu^3 + \mu - 2 = (\mu-1)(\mu^2+\mu+2) = 0$

$\iff \mu = 1$ ou $\underbrace{\mu^2+\mu+2}_{\Delta<0 \text{ : pas de racine réelle}} = 0$

Conclusion : $\boxed{\mu = 1}$.

9c On a montré que, si $v^3 + v = u$, alors $\begin{cases} v(e_1) = \lambda e_1 = 0 \\ v(e_2) = \mu e_2 = e_2 \end{cases}$

donc $Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Puisque $\mathcal{B}$ est une BON, on trouve que v est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(e_2)$.

$\mathrm{Vect}(e_2) = \mathrm{Im}(u)$ donc : $\boxed{v = p_{\mathrm{Im}(u)}}$

9d (synthèse).

Soit $v = p_{Im(u)}$, vérifiant donc : $Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M$.

On calcule $M^3 + M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = Mat_{\mathcal{B}}(u)$

donc $v^3 + v = u$.

Conclusion : $\boxed{v^3 + v = u \iff v = p_{Im(u)}}$.

Pb2 - Partie A

1a | par opérations, e_k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

1b $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e_k(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e_k(x) = 0$.

e_k étant continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$,

le théorème de bijection s'applique :

e_k réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $e_k(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$.

Soit $y > 0$: $e_k(x) = y \iff k \exp(-(k+1)\ln x) = y$

$\iff -(k+1)\ln x = \ln(y/k)$

$\iff x = \exp\left(-\frac{1}{k+1}\ln(y/k)\right)$

Ccl : $\boxed{\forall y > 0, \quad e_k^{-1}(y) = \exp\left(-\frac{1}{k+1} \cdot \ln(y/k)\right)}$ ou : $e_k^{-1}(y) = (y/k)^{-\frac{1}{k+1}}$

1c Vu les limites trouvées en 1b :

$\mathcal{C}_k$ (courbe représentative de e_k) admet :

- en 0, une asymptote verticale, d'équation $x = 0$
- en $+\infty$, une asymptote horizontale, d'équation $y = 0$.

2a $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc $\sqrt{5} = 2\varphi - 1$ et $5 = (2\varphi - 1)^2$

En développant : $\boxed{\varphi^2 - \varphi - 1 = 0}$

2b $e_k'(x) = -\frac{k(k+1)}{x} \cdot \exp(-(k+1)\ln x)$ $\forall x > 0$ donc $e_k'(1) = -k(k+1)$

et $e_k(1) = k$ donc l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 1 est : $T : y = e_k'(1) \times (x-1) + e_k(1)$

$\boxed{T : y = -k(k+1)x + k(k+2)}$.

$e_k'(1) = -1 \iff -k(k+1) = -1 \iff k^2 + k - 1 = 0$

$\iff k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ou $k = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

donc $\boxed{e'_k(1)=-1 \iff k=\varphi-1 \ (\text{ou } k=-\varphi)}$ et $\underline{k>0}$

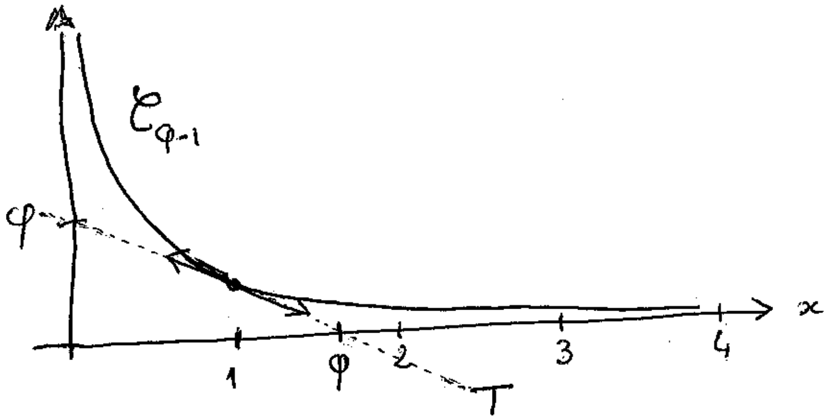
Dans ce cas : $T : y = -x + k(k+2)$

Pour $y=0$, on trouve $x = k(k+2) = (\varphi-1)(\varphi+1)$ ~~$\Leftrightarrow$~~ -

$x = \varphi^2 - 1 = \varphi$

Dans ce cas, <u>cette tangente coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse φ.</u>

<u>2c</u>



(repère non orthonormé)

<u>3</u> Soient $x, y, x', y' \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\frac{e_k(x)}{e_k(y)} = \frac{e_k(x')}{e_k(y')} \iff \frac{k\, e^{-(k+1)\ln x}}{k\, e^{-(k+1)\ln y}} = \frac{k\, e^{-(k+1)\ln x'}}{k\, e^{-(k+1)\ln y'}}$$

$$\iff e^{-(k+1)(\ln x - \ln y)} = e^{-(k+1)(\ln x' - \ln y')}$$

$$\iff \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(\frac{x'}{y'}\right) \iff \frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}.$$

<u>Pb 2 - Partie B</u>

<u>4a</u> $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f_k(x) = k = f_k(1)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<0}} f_k(x) = 0 \neq k$

donc <u>f_k n'est pas continue en 1.</u>

<u>4b</u> • $\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) \geqslant 0$

• Par opérations, f_k est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

• $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_k = \int_1^{+\infty} k\, e^{-(k+1)\ln x}\, dx = \int_1^{+\infty} k \cdot x^{-(k+1)}\, dx = \lim_{+\infty} G_k - G_k(1)$

en posant $G_k(x) = -x^{-k}$ une primitive de e_k sur $[1, +\infty[$.

$\lim\limits_{+\infty} G_k = 0$ et $G_k(1) = -1$ donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_k = 1$.

Conclusion : $\boxed{f_k \text{ est une densité de probabilité.}}$

<u>5a</u> $\forall x \in \mathbb{R},\ F_k(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_k(t)\,dt.$

• Si $x \leqslant 1$: $F_k(x) = 0$

• Si $x > 1$: $F_k(x) = \int_1^x f_k(t)dt = G_k(x) - G_k(1)$

$= -x^{-k} + 1$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_k(x) = \begin{cases} 1 - x^{-k} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}}$

<u>5b</u> Si $x \geqslant 1$: $S_k(x) = 1 - F_k(x) = x^{-k}$.

Soient $x, y, x', y' \in [1, +\infty[$:

$$\frac{S_k(x)}{S_k(y)} = \frac{S_k(x')}{S_k(y')} \iff \frac{x^{-k}}{y^{-k}} = \frac{x'^{-k}}{y'^{-k}} \iff \frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$$

donc <u>S_k vérifie la propriété des rapports constants sur $[1, +\infty[$.</u>

<u>5c</u> On étudie la convergence absolue de $\int_{\mathbb{R}} t.f_k(t)dt = I_k$

$$I_k = \int_1^{+\infty} k.t\, e^{-(k+1)\ln t}\, . dt = k\int_1^{+\infty} t.t^{-(k+1)} dt = k\int_1^{+\infty} t^{-k} dt.$$

* si $k < 1$, $H : t \longmapsto \frac{t^{1-k}}{1-k}$ est une primitive de $t \longmapsto t^{-k}$ sur $[1, +\infty[$, et $\lim\limits_{+\infty} H = +\infty$ donc I_k diverge

* Si $k = 1$, $H : t \longmapsto \ln(t)$ est une primitive de $t \longmapsto t^{-1}$ sur $[1, +\infty[$, et $\lim\limits_{+\infty} H = +\infty$ donc I_1 diverge.

* Si $k > 1$, $H : t \longmapsto \frac{t^{1-k}}{1-k}$ est une primitive de $t \longmapsto t^{-k}$ sur $[1, +\infty[$, et $\lim\limits_{+\infty} H = 0$ donc I_k converge.

Conclusion : $\boxed{\text{X admet une espérance ssi } k > 1 \text{ et dans ce cas : } \mathbb{E}(X) = \frac{k}{k-1}.}$

<u>6a</u> $X(\Omega) = [1, +\infty[$ donc $(X-1)(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $\mathbb{P}(X - 1 \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant x+1) = F_k(x+1)$

donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{X-1}(x) = \begin{cases} 1 - (x+1)^{-k} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$

Par opérations, F_{X-1} est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 0, donc X−1 admet une densité.

6b $X-1$ et $\frac{1}{X-1}$ ont même univers-image ($\mathbb{R}_+^*$).

Soit $x>0$. $P\left(\frac{1}{X-1}\leqslant x\right)=P\left(X-1\geqslant \frac{1}{x}\right)=1-P\left(X-1<\frac{1}{x}\right)$

$=1-P\left(X-1\leqslant\frac{1}{x}\right)$ car X−1 est à densité

$=1-\left(1-\left(\frac{1}{x}+1\right)^{-k}\right)$ d'après 6a, avec $k=1$

$=\left(\frac{1}{x}+1\right)^{-1}=\frac{x}{x+1}$

et $F_{X-1}(x)=1-(x+1)^{-1}=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$

$X-1$ et $\frac{1}{X-1}$ ont même fonction de répartition, donc $\boxed{X-1 \text{ et } \frac{1}{X-1} \text{ suivent la même loi.}}$

7a On cherche q tel que $F_k(q)=0,8$.

$F_k(q)=0,8 \Leftrightarrow 1-q^{-k}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow q^{-k}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow \boxed{q=5^{1/k}}$

7b $\displaystyle\int_q^{+\infty} x f_k(x)\,dx=\int_q^{+\infty} k x^{-k}\,dx = k\left(\lim_{+\infty} H - H(q)\right)$ où H est définie en 5c

$=k.\frac{q^{1-k}}{k-1}=\boxed{\frac{k.5^{\frac{1-k}{k}}}{k-1}=\int_q^{+\infty} x f_k(x)\,dx}$

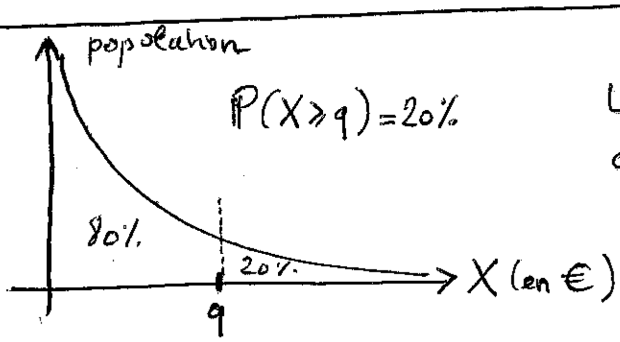
Cette intégrale est le $5^{\text{ème}}$ de la richesse moyenne des 20% les plus riches.

7c Soit (E) : $\frac{k.5^{\frac{1-k}{k}}}{k-1}=\frac{4}{5}\times\frac{k}{k-1}$ $\quad$ (E) $\Leftrightarrow 5^{\frac{1-k}{k}+1}=4$

(E) $\Leftrightarrow 5^{1/k}=4 \Leftrightarrow \frac{1}{k}\ln 5=\ln 4 \Leftrightarrow k=\frac{\ln 5}{\ln 4}=\frac{\ln 5}{2\ln 2}$

$\boxed{\text{(E) admet pour unique solution } k_0=\frac{\ln 5}{2\ln 2}}$

7d



E(X) : richesse moyenne (par personne)
L'égalité pour $k=k_0$ traduit le fait que la richesse moyenne des 20% les plus riches est 4 fois supérieure à la richesse moyenne dans l'ensemble de la population.