TD18 : Fonctions de plusieurs variables

147 On cherche $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\})$ et définie sur $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y \end{cases}$$

On intègre $\frac{\partial f}{\partial x}$ en fixant $y \neq 0$: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + g(y)$

On trouve alors : $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + g'(y)$, donc $g'(y) = 2y$.

On intègre g' : $g(y) = y^2 + \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.

Ccl : $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}, \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 + \alpha.}$

148 $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$. Extrema ?

- $\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3x^2 \\ 2y \end{pmatrix}$

- Points critiques : $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{0} \iff \begin{cases} 2x + 3x^2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = -\frac{2}{3} \\ y = 0 \end{cases}$

f présente deux points critiques : $(0,0)$ et $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$

- Étude des points critiques

$*$ Si $(x,y) \to (0,0)$:
$$f(x,y) - f(0,0) = x^2 + y^2 + x^3 = x^2\underbrace{(1+x)}_{\geq 0 \text{ quand } x \to 0} + y^2 \geq 0$$

donc $\boxed{f \text{ présente un minimum local en } (0,0).}$

$*$ Si $(x,y) \to \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$: on calcule $f\left(-\frac{2}{3}, 0\right) = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}$

et on pose $t = x - \left(-\frac{2}{3}\right) = x + \frac{2}{3}$.

On cherche le signe de la différence :

$$d(x,y) = f(x,y) - f\left(-\tfrac{2}{3}, 0\right)$$

$$d\left(t - \tfrac{2}{3}, y\right) = f\left(t - \tfrac{2}{3}, y\right) - \frac{4}{27}$$

$$= \left(t - \tfrac{2}{3}\right)^2 + y^2 + \left(t - \tfrac{2}{3}\right)^3 - \frac{4}{27}$$

$$= t^2 - \cancel{\tfrac{4}{3}t} + \cancel{\tfrac{4}{9}} + y^2 + t^3 - 2t^2 + \cancel{\tfrac{4}{3}t} - \cancel{\tfrac{8}{27}} - \cancel{\tfrac{4}{27}}$$

$$= -t^2 + t^3 + y^2 = -t^2(1-t) + y^2$$

Si $y = 0$ et $t \to 0$, alors $d(x,y) \leq 0$ car $1 - t \geq 0$

Si $t = 0$ et $y \to 0$, alors $d(x,y) \geq 0$

Ccl : $\boxed{f \text{ présente un point-selle en } \left(-\tfrac{2}{3}, 0\right).}$

$\boxed{150}$ $q(x,y) = ax^2 + cy^2 + 2bxy$ avec $(a,c) \neq (0,0)$.

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=1\}$

(S est le cercle trigonométrique si on assimile $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$).

$\forall t \in [0,2\pi]$, on pose $\varphi(t) = q(\cos t, \sin t)$.

1. Par opérations, φ est <u>continue</u> sur le <u>segment</u> $[0,2\pi]$.

D'après le théorème des bornes : φ est bornée (et atteint ses bornes :)

$\exists m, M \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0,2\pi],\ m \leq \varphi(t) \leq M$

(et $\exists t_0, t_1 \in I$ tels que $m = \varphi(t_0)$ et $M = \varphi(t_1)$)

On en déduit d'après le TVI que : $\boxed{q(S) = [m, M].}$

2. $f(x,y) = q(x,y) - m\|X\|^2$ où $X = (x,y)$.

Soit $X \neq (0,0)$. On calcule :

$$\|X\|^2 . f\left(\frac{X}{\|X\|}\right) = (x^2+y^2) \times f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$= (x^2+y^2) \times \left[q\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - m.1\right]$$

$$= (x^2+y^2) \times \left(a . \frac{x^2}{x^2+y^2} + c . \frac{y^2}{x^2+y^2} + 2b . \frac{xy}{x^2+y^2} - m\right)$$

$$= ax^2 + cy^2 + 2bxy - m(x^2+y^2)$$

$$= q(x,y) - m.\|X\|^2 = f(x,y)$$

<u>Ccl</u> : $\boxed{\forall X \neq (0,0),\ f(x,y) = \|X\|^2 . f\left(\frac{X}{\|X\|}\right).}$

3. Si $X = (0,0)$, $f(0,0) = q(0,0) - m \times 0 = 0$

Si $X \neq (0,0)$, on pose $X' = \frac{X}{\|X\|}$ et $f(X) = \|X\|^2 \times f(X')$.

Mais $\|X'\| = 1$ donc $X' \in S$ et $f(X') = q(X') - m\|X'\|^2$

$= q(X') - m \geq 0$ par définition de m.

<u>Ccl</u> : $\boxed{\forall X \in \mathbb{R}^2,\ f(X) \geq 0}$.

4. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2ax + 2by - m \times 2x$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2cy + 2bx - m \times 2y$

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(a-m)x + 2by \\ 2bx + 2(c-m)y \end{pmatrix}}$$

TD19 Statistiques

154. $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ $i \in [\![1,100]\!]$, indépendantes.

$$F = \frac{1}{100} \times \sum_{i=1}^{100} X_i$$

① Par linéarité de l'espérance, $E(F) = \frac{1}{100} \times \sum_{i=1}^{100} \mathbb{E}(X_i)$ avec $\mathbb{E}(X_i) = p$

donc $\boxed{\mathbb{E}(F) = p}$

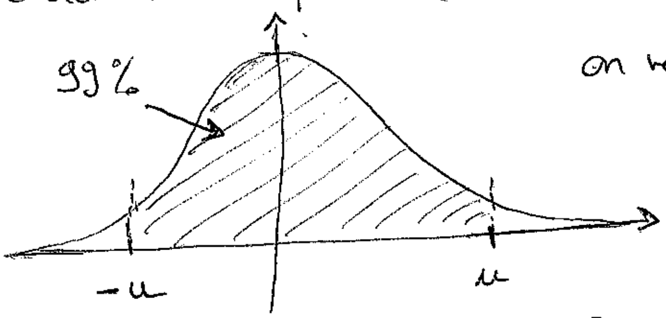
Par indépendance des X_i : $\mathbb{V}(F) = \left(\frac{1}{100}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{100} \mathbb{V}(X_i)$ avec $\mathbb{V}(X_i) = pq$

donc $\boxed{\mathbb{V}(F) = \frac{pq}{100}}$

Avec l'échantillon donné : $p = 0{,}6$ et $\mathbb{V}(F) = \frac{0{,}6 \times 0{,}4}{100} = 0{,}0024$.

② $F^* = \frac{F - 0{,}6}{\sqrt{0{,}0024}} \underset{\sim}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(0,1)$. $\sqrt{0{,}0024} \simeq 0{,}049$

③ On cherche u tel que $\mathbb{P}(|F^*| \leq u) \geq 0{,}99$.



on veut donc $P(F \leq u) = 0{,}995$

donc $u = \Phi^{-1}(0{,}995)$

$\boxed{u \simeq 2{,}58}$

$$IC = \left[F - u\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, F + u\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

$\mathbb{P}(-u \leq F^* \leq u) \geq 0{,}99$ avec $F^* = \frac{F - p}{\sqrt{\frac{pq}{100}}}$

on pose $\boxed{n = 100}$:

$$\mathbb{P}\left(-u \leq \frac{F - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leq u\right) \geq 0{,}99$$

$$\boxed{\mathbb{P}\left(p - u\sqrt{\frac{pq}{n}} \leq F \leq p + u\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \geq 0{,}99}$$

a.n : $\mathbb{P}(0{,}47 \leq F \leq 0{,}73) \geq 0{,}99$.

[l'élection n'est pas jouée d'avance].

④ $\forall p \in [0,1]$, $p(1-p) \leq 1/4$.

$u\sqrt{\frac{pq}{n}} \leq u\sqrt{\frac{1}{4n}} = \frac{u}{2} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$ avec ici $n = 10$. donc $u\sqrt{\frac{pq}{n}} \leq \frac{u}{20}$.

Ccl : $\left[F - \frac{u}{20} ; F + \frac{u}{20}\right]$ contient IC, donc $\mathbb{P}\left(F - \frac{u}{20}, F + \frac{u}{20}\right) \geq 0{,}99$.

⑤ élection non assurée à 99. Réponse différente avec $n = 1000$.