
TD mathématique Bio-spé

Lycée Chateaubriand
Année scolaire 2026/2027

Table des matières

Séries numériques réelles.....	<i>page 2</i>
Théorie des probabilités.....	<i>page 3</i>
Variables aléatoires réelles discrètes.....	<i>page 5</i>
Couples de variables aléatoires discrètes.....	<i>page 7</i>
Dynamique des populations.....	<i>page 9</i>
Espaces vectoriels.....	<i>page 10</i>
Diagonalisation des matrices carrées.....	<i>page 11</i>
Intégrales généralisées.....	<i>page 12</i>
Variables aléatoires réelles à densité.....	<i>page 13</i>
Polynômes.....	<i>page 14</i>
Applications linéaires.....	<i>page 15</i>
Produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$	<i>page 17</i>
Théorèmes limites.....	<i>page 18</i>
Fonctions de deux variables.....	<i>page 19</i>

1. Séries numériques réelles

Exercice 1 Nature d'une série

Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $u_n = n.n!$
2. $u_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$
3. $u_n = 3^{-n} \cos^2(5^n)$
4. $u_n = \frac{n-1}{3^n-1}$
5. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$
6. $u_n = \frac{e^{-\frac{1}{n}}}{n+1}$
7. $u_n = \sin\left(\frac{1}{3^n}\right)$
8. $u_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$

Exercice 2 Utilisation des séries de référence

Pour les séries dont le terme général est donné, justifier la convergence et calculer la somme de la série. Si besoin, préciser les réels x pour lesquels la série converge.

1. $u_n = \frac{(-2)^n}{3^n}, n \geq 1$
2. $u_n = n(n+1)x^{2n}$
3. $u_n = \frac{n^2-n+1}{n!}x^n$
4. $u_n = \frac{4}{(2n+1)(2n+3)}$
5. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Exercice 3 Une série télescopique

Pour $n \geq 1$, on pose : $u_n = \frac{n-1}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Trouver trois réels fixés a, b, c tels que :

$$\forall n \geq 1, u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$
2. Étudier la nature de la série de terme général u_n et, le cas échéant, calculer sa somme.

Exercice 4 Autour de la série exponentielle

Prouver la convergence et exprimer en fonction du réel x les sommes des séries de terme général :

$$u_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Exercice 5 Une somme classique

1. Soit $x \in [-1, 1[$ un réel.
 Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$
2. En déduire, après avoir établi l'existence des sommes, que :

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k 2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Exercice 6 Série de Bertrand

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$.

1. Étudier la fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}.$$
2. Minorer S_n à l'aide d'une intégrale portant sur la fonction f .
3. En déduire la nature de la série de terme général $\frac{1}{k \ln(k)}$.
4. Déterminer un équivalent de S_n .

Exercice 7 Série de Madhava

1. Pour $p \in \mathbf{N}$, on pose : $I_p = \int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2} dx$.
 Montrer que $I_p \leq \frac{1}{p+1}$ et déterminer la limite de la suite $(I_p)_{p \geq 0}$.
2. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose : $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
 a) Vérifier que : $u_n = (-1)^n \int_0^1 x^{2n} dx$.
 b) Exprimer la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ sous forme d'une intégrale, et en reconnaissant un terme de $(I_p)_{p \geq 0}$, prouver la convergence et calculer la somme de la série de terme général u_n .

Exercice 8 Série alternée

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de limite nulle.

On pose : $\forall n \in \mathbf{N}, v_n = (-1)^n u_n$ et $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

1. Montrer que les suites extraites $(S_{2n})_{n \geq 0}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$ sont adjacentes.
2. Que peut-on en déduire ?

2. Théorie des probabilités

Exercice 9 Faux positif

On dispose d'un test de sérologie pour identifier une maladie qui atteint 0.5% de la population.

Sur 99% des individus malades, le test est positif, mais sur 2% des individus sains, le test montre une fausse réaction positive. Un patient est testé positivement. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

Exercice 10 Le choix des urnes

Soit un entier $n \geq 2$. On considère n urnes numérotées $U_1, \dots, U_n$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'urne U_k contient n boules noires et $2k$ boules blanches. On choisit au hasard une urne.

1. On pioche au hasard une boule de l'urne choisie. Déterminer la probabilité p_n que cette boule soit blanche. *On exprimera le résultat sous la forme d'une somme sans chercher à la calculer.*

Étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n \geq 2}$.

2. On suppose ici que $n = 2$. On pioche successivement et avec remise deux boules dans l'urne choisie. On note B_1 et B_2 les événements : « la boule piochée au 1^{er} (resp. 2^{ème}) tirage est blanche ». Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice 11 Urne de Pólya

Soient b, n et c des entiers naturels non nuls. On considère une urne contenant initialement b boules blanches et n boules noires, et on effectue des tirages successifs d'une boule de l'urne selon le protocole suivant : à l'issue de chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne, accompagnée de c boules de la même couleur. Pour tout entier naturel i , on note $p_i(b, n)$ la probabilité d'obtenir une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage, sachant que l'urne contenait initialement b boules blanches et n boules noires.

1. En considérant le résultat du premier tirage, montrer que : $\forall i \geq 2$,

$$p_i(b, n) = \frac{b}{b+n} p_{i-1}(b+c, n) + \frac{n}{b+n} p_{i-1}(b, n+c)$$

2. En déduire que $p_i(b, n)$ ne dépend pas de i .

Exercice 12 Urnes alternées

Soit α, β deux entiers naturels non nuls. On considère une urne U contenant α boules blanches et β boules noires, et une urne V contenant β boules blanches et α boules noires. On choisit une urne puis on tire une boule :

- si elle est blanche on la remet dans l'urne et on tire la suivante dans U ,
- si elle est noire on la remet dans l'urne et on tire la suivante dans V .

On note U_n l'évènement « le n -ième tirage s'effectue dans l'urne U », V_n l'évènement « le n -ième tirage s'effectue dans l'urne V » et B_n l'évènement « le n -ième tirage apporte une boule blanche ».

1. Calculer $\mathbf{P}_{U_n}(B_n)$, $\mathbf{P}_{V_n}(B_n)$, $\mathbf{P}_{B_n}(B_{n+1})$ et $\mathbf{P}_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$.
2. On pose $p_n = \mathbf{P}(B_n)$. Donner une relation entre p_{n+1} et p_n .
3. En déduire p_n si le premier tirage s'effectue dans l'urne U , et si il est dans l'urne V .
4. Calculer la limite de la suite $(p_n)_n$.

Exercice 13 Écriture d'événements

On effectue une suite infinie de lancers de dés. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, on note A_k l'évènement « On obtient l'as au lancer numéro k ».

1. Exprimer en langue française (et sans vocabulaire mathématique) les événements suivants :

$$(a) E = \bigcap_{k=5}^{+\infty} A_k \quad (b) F = \bigcup_{k \geq 4} A_k$$

$$(c) G = \left(\bigcap_{k=1}^4 \overline{A_k} \right) \cap \left(\bigcap_{k=5}^{+\infty} A_k \right)$$

2. On pose pour tout entier $n > 0$: $C_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$.

Montrer que : $\forall n > 0, C_{n+1} \subset C_n$.

3. Traduire en français l'évènement $C = \bigcap_{n \geq 1} C_n$ et déterminer son contraire.

4. Écrire avec les A_k les événements suivants :

a) B_n : « à partir du $n^{\text{ème}}$ lancer, on n'a plus que des as ».

b) B : « à partir d'un certain lancer, on n'a plus que des as ». On pourra passer par les événements B_n .

Exercice 14 Second succès

On lance indéfiniment un dé équilibré à p faces numérotées de 1 à p ($p \geq 2$). Pour $n \geq 2$, on note A_n l'évènement « obtenir une seconde fois 1 lors du $n^{\text{ème}}$ lancer ».

1. Déterminer $a_n = \mathbf{P}(A_n)$ pour $n \geq 2$. Justifier la convergence de la série de terme général a_n , et calculer sa somme.
2. Que peut-on en déduire sur le système d'événements $(A_n)_{n \geq 2}$?

Exercice 15 *Chaîne de Markov*

Une puce peut se déplacer sur trois cases A, B, C .

À l'instant $t = 0$, elle est sur la case A .

À l'instant $n \in \mathbf{N}$, si elle est sur A ou B , elle peut passer à l'instant $n + 1$ sur les autres cases de manière équiprobable, et si elle est sur C , elle y reste.

Pour tout entier naturel n , on note a_n, b_n et c_n les probabilités que la puce se trouve respectivement sur A, B, C à l'instant n .

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Exprimer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n et c_n .
2. Trouver une relation entre c_{n+2}, c_{n+1} et c_n .
En déduire c_n en fonction de n .
3. Calculer la probabilité que la puce finisse sur C .

Exercice 16 *Formule des probabilités totales*

Soit une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$. On la lance jusqu'à l'apparition du premier pile. On dispose d'une infinité d'urnes $(U_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'urne U_n contient n boules dont une exactement est blanche. Si le premier pile apparaît au lancer $k \in \mathbf{N}^*$, on tire une boule dans l'urne U_k .

Calculer la probabilité que cette boule soit blanche.

Exercice 17 *Séquence Pile-Pile-Face*

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. On note A_n l'événement « on obtient au moins une fois PPF avant le lancer n » et B_n l'événement : « on obtient pour la première fois PPF au lancer n ».

1. Montrer que :

$$\forall n \geq 3, \mathbf{P}(A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_n) + \frac{1}{8}(1 - \mathbf{P}(A_{n-2})).$$

2. Justifier la convergence de la suite $(\mathbf{P}(A_n))_n$ et déterminer sa limite.

Exercice 18 *Dénombrement*

1. Un mot contient exactement p fois la lettre A et q fois la lettre B. Combien ce mot possède-t-il d'anagrammes ?
2. Soient $n, p \in \mathbf{N}^*$. Combien existe-t-il de p -uplets $(x_1, \dots, x_p)$ d'entiers naturels tels que $x_1 + \dots + x_p = n$?
3. Soient $m, n \in \mathbf{N}^*$. Combien y a-t-il de façons de placer m boules indiscernables dans n urnes ?

3. Variables aléatoires réelles discrètes

Exercice 19 Loi usuelle décalée 1

Soit $p \in]0, 1[$. Une machine fabrique des pièces sans défaut avec la probabilité p . Ces pièces sont contrôlées au fur et à mesure. Dès que l'on obtient une pièce défectueuse, on arrête la machine. Soit N le nombre de pièces fabriquées sans défaut. Déterminer la loi de N , puis calculer son espérance et sa variance.

Exercice 20 Loi usuelle décalée 2

Un commerçant estime que la demande d'un certain produit saisonnier est une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}$ dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \mathbf{P}(X = k) = \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}}$$

1. Vérifier que l'on définit bien une loi de probabilité pour X .
2. Reconnaître la loi de $X + 1$. En déduire l'espérance et la variance de X .
3. Connaissant son stock s , déterminer la probabilité de rupture de stock.

Exercice 21 Tirages sans remise

Une urne contient $n \in \mathbf{N}^*$ boules numérotées de 1 à n . On tire une à une l'ensemble des boules. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la $k^{\text{ème}}$ boule tirée.

Déterminer la loi de X_1 , puis celle de X_2 , puis celle de X_k pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 22 Loi de Bernoulli conditionnée

On dispose d'un dé équilibré et d'une urne contenant une boule blanche. On effectue une suite de lancers successifs avec le dé : à chaque fois que l'on obtient un résultat différent de 6, on ajoute une boule rouge dans l'urne et on effectue un nouveau tirage. Si on obtient un 6, on extrait une boule de l'urne, puis l'expérience s'arrête.

On note X la variable aléatoire égale au rang auquel on obtient le 6 et Y la variable aléatoire égale à 1 si on extrait la boule blanche et 0 sinon.

1. a) Reconnaître la loi de X .
b) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier 6 au plus tard au $k^{\text{ème}}$ lancer ?

2. Calculer la loi de Y .

On admettra que pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Exercice 23 Autour d'une loi binomiale

On considère une variable aléatoire X de loi binomiale $\mathcal{B}(2n, p)$. Donner la loi de $Y = (X - n)^2$ puis calculer son espérance en utilisant l'espérance et la variance de X .

Exercice 24 Loi à reconnaître

Soit n et N deux entiers naturels non nuls. On répartit au hasard n tickets de tombola entre N personnes dont Alice. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tickets reçus par Alice.

Déterminer la loi, l'espérance, et la variance de X .

Exercice 25 Formule de transfert

1. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$.
Calculer l'espérance et la variance de $\frac{1}{X+1}$.

2. Soit Y une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Calculer $a = \mathbf{E}(Y+1)$ et $b = \mathbf{E}\left(\frac{1}{Y+1}\right)$.

Vérifier que $\frac{1}{a} \leq b$. L'égalité est-elle possible ?

Exercice 26 Loi d'un maximum

On lance 5 dés. On met de côtés les dés avec lesquels on a obtenu un As et on relance les autres. On répète l'opération jusqu'à ce qu'on ait obtenu 5 As. On note X le nombre de lancers effectués. Déterminer la loi de X .

Exercice 27 Parité d'une loi binomiale

1. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $a, b \in \mathbf{R}$.

En développant $(a+b)^n$ et $(-a+b)^n$, calculer :

$$S = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} a^{2k} b^{n-2k}$$

2. Soit $N \geq 2$ un entier. Quelle est la probabilité p_N d'obtenir un nombre pair d'As lorsque l'on lance N fois de suite un dé équilibré ?

Exercice 28 Parité d'une loi de Poisson

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Exprimer sous forme de la somme d'une série :
 $e^\lambda + e^{-\lambda}$ et $e^\lambda - e^{-\lambda}$.
2. Déterminer la probabilité des événements :
« X est pair » et « X est impair ».

3. On pose : $Y(\omega) = \begin{cases} \frac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Déterminer la loi de Y , puis calculer son espérance.

Exercice 29 *Loi quelconque*

Un sauteur de haies saute successivement une infinité de hauteurs numérotées $1, 2 \dots n, \dots$. La probabilité de sauter avec succès la hauteur n est $1/n$. On note X le nombre de haies sautées avec succès.

1. Déterminer la loi de X et vérifier que l'on a bien :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X = k) = 1.$$

2. a) Calculer $\mathbf{E}(X + 1)$ et $\mathbf{E}((X + 1)(X - 1))$.
b) En déduire l'espérance et la variance de X .

Exercice 30 *Premier succès sans remise*

Une urne contient 2 boules rouges et $n - 2$ boules blanches ($n \geq 2$). On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne. Soit X_n le rang d'apparition de la première boule rouge.

1. Déterminer la loi de X_n .
2. Calculer $e_n = \mathbf{E}(X_n)$.

Donner un équivalent simple de e_n .

Exercice 31 *Espérance d'une VAR entière*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ (X est alors dite *entière*).

1. On suppose que $X(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$ pour un certain entier naturel n .

Montrer que : $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X \geq k)$.

2. On suppose que X admet une espérance.

Montrer que : $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq k)$.

Exercice 32 *Problème du collectionneur*

Une urne contient une proportion p de boules noires et une proportion $q = 1 - p$ de boules blanches. On effectue des tirages avec remise d'une boule dans cette urne jusqu'à obtenir des boules des deux couleurs. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Trouver la loi de X , et vérifier que $\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = k) = 1$.
2. Montrer que X admet une espérance, et la calculer.

Exercice 33 *Numéros strictement décroissants*

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à obtenir une boule dont le numéro est supérieur ou égal à celui de la boule précédemment extraite. On note X_n le nombre de tirages effectués.

1. Calculer $\mathbf{P}(X_n > j)$ pour $j \in \mathbf{N}$ et en déduire $\mathbf{P}(X_n = j)$ pour $j \in \mathbf{N}$.
2. Calculer leur limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 34 *Le compteur défectueux*

Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p . Un compteur indique la valeur de X , mais il est détraqué : si X prend une valeur inférieure ou égale à N , il affiche bien cette valeur, mais sinon il affiche un nombre entier au hasard entre 1 et N . On appelle Y la variable aléatoire affichée. Déterminer la loi de Y et calculer son espérance.

4. Couples de variables aléatoires discrètes

Exercice 35 Loi conjointe donnée

On considère un couple de variables aléatoires réelles (X, Y) à valeurs dans $\mathbf{N}^2$ de loi conjointe donnée par :

$$\forall (n, m) \in \mathbf{N}^2, \mathbf{P}(X = n, Y = m) = \frac{e^{-1}}{2^{n+1}m!}$$

1. Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y , et donner leurs espérance et variance si elles existent.
2. Étudier l'indépendance de X et Y .
3. Calculer $\mathbf{P}(2 < X \leq 4, Y < 2)$.

Exercice 36 $\mathcal{B}$ conditionnée par $\mathcal{P}$

Le nombre de graines plantées dans un jardin est une variable aléatoire N qui suit une loi de Poisson de paramètre λ . Chaque graine a la probabilité p de germer. Soit G le nombre de graines qui ont germé.

1. Préciser la loi de G sachant $[N = n]$ pour $n \in \mathbf{N}$.
2. Déterminer la loi du couple (G, N) .
3. Déterminer alors la loi de G ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 37 VAR non indépendantes

Soit $N \geq 1$ un entier naturel. Dans une petite ville proposant trois hôtels $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$, N personnes choisissent un hôtel au hasard. Soit X_i la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant choisi de séjourner dans l'hôtel $\mathcal{H}_i$ ($1 \leq i \leq 3$).

1. Donner les lois de X_1, X_2 et X_3 . Rappeler leurs espérance et variance.
2. Donner la loi de $X_1 + X_2$.
3. Calculer ses espérance et variance.
4. Calculer la covariance de X_1 et X_2 .

Exercice 38 Somme de lois de Poisson

Soit λ, μ deux réels strictement positifs. Au péage d'une autoroute, le nombre aléatoire X de véhicules dans le sens Paris-Provence suit une loi de Poisson de paramètre λ , et dans l'autre sens, ce nombre aléatoire Y suit une loi de Poisson de paramètre μ . On suppose les variables X et Y indépendantes.

1. Soit Z le nombre total de véhicules passant au péage. Donner la loi de Z .
2. Soient k, n deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$. Quelle est la probabilité que, sur n véhicules passant au péage, k viennent de Paris?

Exercice 39 Avec des lois uniformes

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Deux urnes contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n . On tire une boule de chaque urne. On note X et Y les variables aléatoires égales respectivement au plus petit et au plus grand numéro tiré.

1. Calculer la loi du couple (X, Y) .
2. X et Y sont-elles indépendantes?
3. Calculer leur espérance.
4. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 40 Lois géométriques décalées

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par :

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

On pose $Z = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$.

1. Trouver la loi du couple (Z, T) , puis celles de Z et de T .
2. Z et T sont-elles indépendantes?

Exercice 41 Loi du second Pile

La probabilité d'obtenir Pile lors du lancer d'une pièce est $p \in]0, 1[$. On effectue une infinité de lancers, indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier Pile, et Y la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le deuxième Pile.

1. Rappeler la loi de X , son espérance et sa variance.
2. Donner la loi du couple (X, Y) puis celle de Y .

Exercice 42 $\mathcal{U}$ conditionnée par $\mathcal{U}$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n telles que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'urne k contient des jetons numérotés de 1 à k . On choisit une urne au hasard et on note X son numéro. On tire ensuite au hasard un jeton dans cette urne, et on note Y le numéro du jeton tiré.

1. Reconnaître la loi de X et rappeler son espérance.
2. Calculer la loi du couple (X, Y) .
3. Donner la loi de Y et calculer son espérance.
4. Calculer la covariance du couple (X, Y) .

Exercice 43 Comparaison de lois géométriques

Soient $p, q \in]0, 1[$. On considère des variables aléatoires X et Y indépendantes qui suivent des lois géométriques de paramètres p, q respectivement.

1. Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(X = Y)$.
2. On suppose ici que $p = q$. Justifier que $\mathbf{P}(X > Y) = \mathbf{P}(Y > X)$. Calculer alors $\mathbf{P}(X > Y)$.

Exercice 44 *Écart et min de lois géométriques*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Soient U, V les variables aléatoires définies par :

$$U = |X - Y| \quad \text{et} \quad V = \min(X, Y).$$

1. Donner la loi du couple (U, V) .
2. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 45 *Avec des lois de Bernoulli*

Soit $n \geq 1$ un entier et $p \in [0, 1]$ un réel. On considère n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p .

Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on note $Y_i = X_i X_{i+1}$ et on définit la variable S_n par :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i.$$

1. Donner la loi de Y_i pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$.
En déduire l'espérance de S_n .

2. Développer S_n^2 puis calculer l'espérance de S_n^2 .
3. En déduire la variance de S_n .

Exercice 46 *Sauts de puce*

Une puce se déplace dans un repère orthonormé. À l'instant 0, elle est à l'origine. À chaque instant, elle va soit vers le nord, soit vers le sud, soit vers l'est, soit vers l'ouest de façon équiprobable. Elle saute d'une unité à la fois.

On désigne par (X_n, Y_n) les coordonnées de la puce après n sauts.

1. Sans chercher à déterminer la loi, calculer l'espérance et la variance de X_n .
Utiliser les variables $E_n + O_n$ et $E_n - O_n$ après avoir défini les variables E_n et O_n .
2. Soit R_n la distance du point à l'origine après n sauts.
Calculer $\mathbf{E}(R_n^2)$ et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Dynamique des populations

Exercice 47 Une ED autonome

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = y^2$.

- Déterminer toute solution constante de (E) .
- Dans toute la suite, on suppose qu'une solution y de (E) vérifie $y(0) \neq 0$ et est définie sur $I = [0, \alpha[$ avec $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ ou $\alpha = +\infty$.
On admet alors que : $\forall t \in I, y(t) \neq 0$.
a) Que dire du sens de variations de y ?
Montrer que y garde un signe constant sur I .
b) Intégrer (E) en constatant que $\frac{y'}{y^2} = 1$.
c) Préciser α et l'allure de la courbe représentative de y selon le signe de $y(0)$.

Exercice 48 Modèle discret

L'évolution de l'effectif d'une population donnée est décrite par le modèle suivant :

$$\begin{cases} P_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad P_{n+1} = \frac{K_0 P_n}{P_n + K_1} \end{cases}$$

où P_n est l'effectif de la population étudiée à la date n , K_0 et K_1 sont deux réels strictement positifs qui ne dépendent pas de n tels que $K_1 < K_0$.

- Montrer que $P_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
- Montrer que $Q_n = 1/P_n$ est le terme général d'une suite arithmético-géométrique.
- En calculant la forme explicite de Q_n , déterminer le comportement de P_n à l'infini.
Interpréter les résultats précédents en termes d'évolution de la population.

Exercice 49 Modèle de Ricker

Soit μ et K deux nombres réels tels que $0 < \mu < 1$ et $K > 0$. Selon le modèle de Ricker, l'évolution de la population de cerfs peut être décrite par la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbf{N} \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad x_{n+1} = x_n e^{\mu(1-x_n/K)} \end{cases}$$

- On pose pour x réel : $f(x) = x e^{\mu(1-x/K)}$.
a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet 2 solutions notées α et β ($\alpha < \beta$).
Que dire de $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ si $x_0 = \alpha$ ou β ?
Que représentent concrètement α et β pour les populations de cerfs?
b) Déterminer le tableau de variations de f .
c) Étudier le signe de $f(x) - x$ pour $x \geq 0$.
d) Donner l'allure de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = x$.
- On suppose dans cette question : $x_0 \in]0, K[$.
a) Déterminer les variations de $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
b) Étudier la convergence de cette suite.

3. Mêmes questions qu'en 2. avec $x_0 \in [K, K/\mu]$.

- On suppose enfin que $x_0 \in [K/\mu, +\infty[$.
a) Conjecturer le sens de variations et la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
b) Montrer qu'il existe un unique $\gamma \geq K/\mu$ tel que $f(\gamma) = K$.
c) Étudier alors la convergence de (x_n) .

Exercice 50 Verhulst avec prélèvement

On considère une population qui suit un modèle de croissance logistique. On décide de lui imposer un quota de prélèvement par unité de temps constant p . On s'intéresse alors à l'équation différentielle suivante :

$$(V_P) \quad y' = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) - p$$

où r, K, p sont des réels strictement positifs fixés.

- Déterminer une condition sur p pour que (V_P) possède au moins une solution constante.

Dans la suite, on suppose $p < \frac{Kr}{4}$.

Soient $y_1 < y_2$ les solutions constantes de (V_P) .

- Que dire de la somme $y_1 + y_2$?
- Dans cette question, on a choisi p de telle sorte que $y_1 = \frac{K}{10}$. Soit y une solution de (V_P) définie sur un intervalle I sur lequel elle est strictement comprise entre y_1 et y_2 .
a) Déterminer une équation différentielle vérifiée par $z = y - y_1$.
b) Déterminer z . On pourra poser $u = 1/z$.
c) En déduire une expression de y sur I .
Représenter y, y_1 et y_2 . Interpréter.

Exercice 51 Modèle de Johnson-Schumacher

Soient r et K deux réels strictement positifs. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(JS) \quad y' = ry \left(\ln \frac{y}{K}\right)^2$$

- Calculer les solutions constantes de (JS) .
- Soit y une solution non constante de (JS) , définie sur un intervalle I contenant 0 telle que $y(0) = y_0 \in]0, K[$ et ne prenant jamais les valeurs 0 et K sur I .
a) Montrer que : $\forall t \in I \quad 0 < y(t) < K$.
b) Déterminer y et I .
- Soit $y_0 \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{K\}$. Déterminer la solution de (JS) vérifiant $y(0) = y_0$.
- Représenter graphiquement les solutions pour quelques valeurs de y_0 ainsi que les solutions constantes de (JS) .

6. Espaces vectoriels

Exercice 52 Reconnaître des s -ev

Quels sont les espaces vectoriels parmi les ensembles suivants ?

1. E_1 : ensemble des couples de réels (x, y) tels que $x = 2y$.
2. E_2 : ensemble des polynômes réels P tels que $\deg(P) = 2$.
3. E_3 : ensemble des solutions de l'équation différentielle $xy'' + (x^2 + 1)y' + 3y = 0$.
4. E_4 : ensemble des solutions de l'équation différentielle $(x^2 - 1)y' - 2xy = xe^x$.
5. $E_5 = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P(1) = 0\}$.
6. E_6 : ensemble des fonctions f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f(x) = \frac{1}{x^2} \circ \left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 53 Familles de vecteurs

Soit (u, v, w) une base d'un espace vectoriel E . Déterminer le rang des familles suivantes, et préciser si elles sont libres, génératrices ou des bases de E .

1. $\mathcal{F}_1 = (u, u - 2v + w, -v + w)$
2. $\mathcal{F}_2 = (u - v, v - w, w - u)$
3. $\mathcal{F}_3 = (-u, u - 2v + w)$
4. $\mathcal{F}_4 = (u + v, u + w, -v + w)$
5. $\mathcal{F}_5 = (u - v, v - w, u - 2v + w, u - 3v + 2w)$

Exercice 54 S -ev de $\mathbf{R}^3$ ou $\mathbf{R}^4$

Déterminer une base des espaces vectoriels suivants :

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4; 3x - 2y + z = 0\}$$

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4; 2x - y + t = x + 2t = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; 3x - 2y = z = -x + y\}$$

Exercice 55 Nouvelle base

Soient les vecteurs $u_1 = (2, 1, -1)$, $u_2 = (2, -1, 1)$ et $u_3 = (3, 0, 1)$ dans $\mathbf{R}^3$.

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$.
2. Quelles sont les coordonnées de $(2, -1, 1)$ et celles de $(1, 2, -1)$ dans $\mathcal{B}$?

Exercice 56 Base de $\mathbf{R}_2[X]$

1. Montrer que la famille constituée des polynômes $P_1 = 1 + X + X^2$, $P_2 = -1 + X + X^2$ et $P_3 = 1 - X + X^2$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.
2. Étant donné $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, quelles sont les coordonnées de $P = a + bX + cX^2$ relativement à cette base ?

Exercice 57 Base des dérivées

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et P un polynôme réel de degré n . Montrer que $(P, P', P'', \dots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Exercice 58 Droite dans $\mathbf{R}_3[X]$

Soit $E = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid P(0) = P'(0) = P(1) = 0\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.
2. Déterminer une base de E et préciser sa dimension.
3. Montrer que la juxtaposition de la base de E trouvée précédemment et de la famille $\mathcal{F} = (1 + X, 1 - X^2, 1 + X^3)$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

Exercice 59 Base de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$

Dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, soient les matrices A, B, C, D :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que la famille (A, B, C, D) est une base de E et donner les coordonnées d'une matrice

$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ quelconque dans cette base.

Exercice 60 S -ev de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$

On considère l'ensemble E des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

où $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et en donner une base et la dimension.
2. Montrer que E est stable par produit matriciel, et que tous ses éléments commutent.

Exercice 61 S -ev de fonctions

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. Pour $a > 0$, on note F_a l'ensemble des fonctions de E de la forme :

$$x \mapsto P(x)e^{ax} + Q(x)e^{-ax}$$

où P et Q sont des polynômes de degré ≤ 1 .

1. Montrer que F_a est un sous-espace vectoriel de E , et qu'il est stable par dérivation.
2. On considère les fonctions $f_1 : x \mapsto e^{ax}$, $f_2 : x \mapsto xe^{ax}$, $f_3 : x \mapsto e^{-ax}$ et $f_4 : x \mapsto xe^{-ax}$. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de F_a . En déduire sa dimension.
3. Soit $f \in F_a$. Déterminer les coordonnées de f et de f' dans la base $\mathcal{B}$.

7. Diagonalisation des matrices carrées

Exercice 62 Technique de diagonalisation

Calculer le spectre des matrices suivantes, étudier leur éventuelle diagonalisabilité et, le cas échéant, donner une matrice P inversible les diagonalisant.

$$\begin{array}{l} A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ A_2 = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \\ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A_4 = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -3 & 9 & 8 \end{pmatrix} \\ A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -8 & -5 \end{pmatrix} \\ A_7 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Exercice 63 Application : système différentiel

On considère le système différentiel, d'inconnues les fonctions x, y, z de la variable t définies sur $\mathbf{R}$ et donné par :

$$(S) \quad \begin{cases} x' = x + 3y + 2z \\ y' = -2y - 2z \\ z' = -3x + 9y + 8z \end{cases}$$

Soient $\forall t \in \mathbf{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.

1. Préciser la matrice A telle que le système différentiel (S) équivaut à : $X'(t) = AX(t)$.
Rappeler des matrices D, P diagonalisant A .
2. On pose $\forall t \in \mathbf{R}$, $Y(t) = P^{-1}X(t)$
et on nomme u, v, w les fonctions telles que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

Justifier que u, v, w sont dérivables sur $\mathbf{R}$.

Montrer que $(S) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbf{R}, Y'(t) = DY(t)$

puis déterminer des expressions pour u, v, w .

3. En déduire les solutions générales de (S) .

Exercice 64 Application : suites imbriquées

On définit trois suites par $u_0 = 1, v_0 = 1, w_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = -5u_n + 6v_n + 4w_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 5v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = 2u_n - 2v_n - 3w_n \end{cases}$$

1. On pose $\forall n \in \mathbf{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A telle que $\forall n \in \mathbf{N}$ $X_{n+1} = AX_n$.
Rappeler des matrices D, P diagonalisant A .
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer A^n .
3. Déterminer u_n, v_n, w_n en fonction de n et de u_0, v_0, w_0 pour tout entier n .

Exercice 65 Application : récurrence d'ordre 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 0, u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$$

On pose : $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice A telle que :
 $\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} = AU_n$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, U_n = A^n U_0$.
3. Diagonaliser la matrice A .
4. En déduire u_n en fonction de n .

Exercice 66 Polynôme annulateur

Soient M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, λ une valeur propre de M et U un vecteur propre associé.

1. Soit $k \in \mathbf{N}$.
Exprimer $M^k U$ en fonction de λ, U et k .
2. Soit $Q = \sum_{k=0}^m q_k X^k$ un polynôme à coefficients

dans $\mathbf{K}$. Notons $Q(M)$ la matrice $\sum_{k=0}^m q_k M^k$.

- a) Exprimer $Q(M)U$ en fonction de Q, λ et U .
- b) En déduire que si $Q(M)$ est la matrice nulle, et si λ est une valeur propre de M , alors λ est une racine du polynôme Q .

$$\text{c) Soit } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R}).$$

Calculer C^4 .

En déduire que : $\text{Sp}(C) \subset \{1, i, -1, -i\}$.

Exercice 67 Co-diagonalisation

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes et que A et B commutent ($AB = BA$).
a) Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B .
b) En déduire l'existence d'une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ constituée de vecteurs propres communs à A et à B .
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ et on veut résoudre l'équation $M^3 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
a) Trouver des matrices D, P diagonalisant A .
b) Justifier que si $M^3 = A$, alors $AM = MA$.
c) Montrer que $M^3 = A \Leftrightarrow N^3 = D$ où N est une matrice à préciser.
d) Conclure.

8. Intégrales généralisées

Exercice 68 Techniques d'intégration

Étudier la convergence des intégrales suivantes. Les calculer le cas échéant.

$$\begin{array}{l|l} I_1 = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx & I_6 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^3} dt \\ I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t \ln(t)} dt & I_7 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 3x + 2} \\ I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 + 2x + 1} & I_8 = \int_0^{+\infty} 4xe^{-2x} dx \\ I_4 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt & I_9 = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}} dx \\ I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(x)}{x^2} dx & I_{10} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(x)}{1+x^2} dx \end{array}$$

Exercice 69 Suite d'intégrales (1)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère : $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$

1. Étudier la convergence de l'intégrale I_n pour tout entier naturel n non nul.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $I_n - I_{n+1}$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Exprimer I_n en fonction de $n \in \mathbf{N}^*$.

Exercice 70 Suite d'intégrales (2)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n+x} dx \text{ et } J_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(n+x)^2} dx.$$

1. Montrer que I_n converge pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

3. Montrer que J_n converge et que $J_n = o(I_n)$.

4. Montrer que : $\forall n \geq 1, I_n = \frac{1}{n} - J_n$.

En déduire que $I_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$.

Exercice 71 Fonction Gamma d'Euler

On définit la fonction : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Montrer que $\Gamma(x)$ converge pour tout $x \geq 1$.
2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall x \geq 1, \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$

Exercice 72 Des changements de variables

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$,

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx \text{ et } K = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin x) dx.$$

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \ln(x) dx$ est convergente.
2. Soit g la fonction définie sur $]0, \pi/2]$ par : $g(x) = \ln(\sin x) - \ln x$.

Étudier la convergence de $\int_0^{\pi/2} g(x) dx$ puis celle de I .

3. a) Montrer que $I = J = K$.

On pourra effectuer des changements de variables affines.

- b) Montrer que $I + J = -\frac{\pi \ln 2}{2} + \frac{1}{2}(I + K)$.
- c) En déduire que la valeur de I, J et K .

9. Variables aléatoires réelles à densité

Exercice 73 *Simuler une loi exponentielle*

Soient $\lambda > 0$ et U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$.

Montrer que $-\frac{1}{\lambda} \ln(U)$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice 74 *Loi de Weibull*

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f .
 - a) Déterminer la fonction de répartition de X .
 - b) Reconnaître la loi de $Y = X^2$.

Exercice 75 *Loi usuelle décalée*

Soit $b > 0$. On définit une fonction g sur $\mathbf{R}$ en posant :

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{b}{2^t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

1. Déterminer la constante b pour que g soit une densité d'une variable aléatoire X .
2. Reconnaître la loi de $Y = X - 1$.
En déduire que X possède une espérance et une variance, et les déterminer.
3. On note Z la variable aléatoire égale à la partie entière de X . Déterminer la loi de Z .

Exercice 76 *Minimum et maximum*

X et Y sont deux variables aléatoires à densité, indépendantes. On pose :

$$Z = \max(X, Y) \text{ et } T = \min(X, Y).$$

1. On suppose que :
 $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.
Déterminer les lois, espérances et variances de Z et T .
2. On suppose que :
 $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$.
Reconnaître la loi suivie par T .
En déduire l'espérance de Z (on remarquera que $Z + T = X + Y$).

Exercice 77 *Loi de Cauchy*

Soit $a > 0$. On pose : $\forall x \in \mathbf{R}, f_a(x) = \frac{k_a}{a^2 + x^2}$,
où k_a est une constante.

1. Déterminer k_a de sorte que f_a soit une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f_a .
 X admet-elle une espérance ? Justifier.
3. Dans toute la suite, on pose $a = 1$.
 - a) Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de densité f_1 .

b) Montrer que :

$$\forall x > 0, \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Préciser un résultat similaire pour $x < 0$.

c) On pose $Y = \frac{1}{X}$.

Étudier la fonction de répartition de Y sur $\mathbf{R}_-$, puis sur $\mathbf{R}_+$. Conclure.

Exercice 78 *Loi triangulaire*

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de densité f . On note $Y = \min(X_1, X_2)$.
Montrer que Y est une variable à densité et calculer une densité de probabilité de Y .

Exercice 79 *Combinaison de lois exponentielles*

Soit $p \in]0, 1[$, et a, b deux réels strictement positifs. Une boîte contient deux ampoules A et B indiscernables mais dont les durées d'éclairement suivent une loi exponentielle de paramètres respectifs a et b . On tire au hasard une ampoule de la boîte, la probabilité que A soit choisie étant égale à p . On note X la variable aléatoire égale à la durée de vie de l'ampoule issue de ce protocole.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 80 *Produit de convolution (1)*

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{U}([0, 1])$ et $\mathcal{U}([0, 2])$.
Déterminer la loi de $X + Y$. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 81 *Produit de convolution (2)*

Soit $\lambda > 0$ un réel, et X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, de loi exponentielle de paramètre λ .

1. Déterminer une densité de $-X$, puis une densité de $X - Y$ par convolution.
2. Vérifier que $Z = |X - Y|$ suit une loi exponentielle.

Exercice 82 *Calculs avec la loi normale*

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne 1 et de variance 2.

On pose $Y = e^{X+1}$.

1. Justifier que Y admet une espérance et une variance, et les déterminer.
2. Montrer que Y est une variable à densité, et déterminer une densité de Y .

10. Polynômes

Exercice 83 Factorisations

Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P = 2X^3 - 14X + 12$
2. $Q = X^4 + X^2 + 1$
3. $R = X^4 + X^3 + X + 1$
4. $S = X^4 + 4$

Exercice 84 Applications trigonométriques

1. Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ le polynôme $X^6 - X^3 + 1$, puis en déduire la valeur de :

$$\alpha = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9}.$$
2. Soient $n \in \mathbf{N}^*$, et P_n le polynôme défini par :
 $P_n = (X + 1)^n - 1.$
 - a) Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^n = 1$.
 - b) En déduire la factorisation de P_n .
 - c) Calculer de deux façons différentes le nombre $P'_n(0)$:
 - * À l'aide de la formule du binôme,
 - * en utilisant la forme factorisée de P_n .
 - d) En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right).$

Exercice 85 Divisibilité

Soient $\theta \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

On pose : $P = X^2 - 2 \cos \theta \cdot X + 1$,

et $Q = X^{2n} - 2 \cos(n\theta) \cdot X^n + 1$.

Montrer que Q se factorise par P .

Exercice 86 Étude de degré

Étudier selon l'entier naturel n le degré de :

$$P_n = (X^2 + 1)^n - 2X^{2n} + (X^2 - 1)^n$$

Exercice 87 Polynôme complexe

Soit $n \geq 2$ un entier.

On pose : $P_n = (X + i)^n - (X - i)^n$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, il existe un polynôme $Q_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P_n = iXQ_n$.
2. Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ le polynôme P_n .

Indication : déterminer les racines en résolvant tout d'abord l'équation $Z^n = 1$ et justifier comment s'y ramener par un choix de Z à préciser.

Exercice 88 Polynômes de Tchebychev

On définit une suite $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de polynômes de $\mathbf{R}[X]$ par la donnée de $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n.$$

1. Calculer P_2 , P_3 et P_4 .

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, déterminer le monôme dominant du polynôme P_n .

2. Soit $z \in \mathbf{C}^*$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$P_n \left(z + \frac{1}{z} \right) = z^n + \frac{1}{z^n}.$$

3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \alpha_k = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2n} + k \frac{\pi}{n} \right).$$

Montrer que α_k est racine de P_n pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Ces racines sont-elles deux à deux distinctes ? Que peut-on en conclure ?

Exercice 89 Polynômes réels scindés

1. Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 2, à coefficients réels et dont les racines sont toutes réelles et simples :

$$P = a \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)$$

où $a \neq 0$, $p \geq 2$ et $\alpha_1 < \dots < \alpha_p$.

Montrer que P' a également toutes ses racines réelles et simples. *Indication : on pourra utiliser le théorème de Rolle sur des intervalles bien choisis.*

2. Soit P un polynôme non nul, à coefficients réels et dont les racines sont toutes réelles :

$$P = a \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{m_k}$$

où $a \neq 0$, $\alpha_1 < \dots < \alpha_p$ et $m_1, \dots, m_p \in \mathbf{N}^*$.

- a. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, P' se factorise par $(X - \alpha_k)^{m_k - 1}$.
- b. Montrer alors que P' a également toutes ses racines réelles.

11. Applications linéaires

Exercice 90 Endomorphisme de $\mathbf{R}^4$

Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbf{R}^4$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^4$ défini par

$$f(e_1) = e_2 - e_3, \quad f(e_2) = -2e_2 + 2e_3,$$

$$f(e_3) = e_1 + e_4, \quad f(e_4) = e_1 + e_2 - e_3 + e_4.$$

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique.
2. Déterminer $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ (bases et dimensions attendues).

Exercice 91 Application linéaire à paramètre

Soit un réel m et $f_m : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$ définie par

$$f_m(x, y, z) = (t, u, v, w)$$

où $t = x + (m-1)y$, $u = 2x - 2y + 2mz$, $v = y - 4z$ et $w = 2mz$.

1. Justifier que f_m est linéaire.
2. Donner la matrice A_m de f_m dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^4$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f_m suivant la valeur du réel m .
4. Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles f_m est injective? surjective? un isomorphisme?

Exercice 92 Matrices semblables

On considère les matrices M et M' suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note u l'application linéaire de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques est M .

1. Que valent p et n ?
Donner une base de $\text{Ker } u$ et de $\text{Im } u$.
2. Montrer qu'il existe des bases de $\mathbf{R}^p$ et de $\mathbf{R}^n$ dans lesquelles la matrice de u est M' .

Exercice 93 Endomorphisme diagonalisable

Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que 1 et 2 sont valeurs propres de M .
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable?

Exercice 94 Dérivation discrète

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère l'application :

$$f_n : \begin{cases} \mathbf{R}_n[X] \rightarrow \mathbf{R}_n[X] \\ P \mapsto Q \end{cases} \quad \text{où :} \quad \forall x \in \mathbf{R}, Q(x) = P(x+1) - P(x).$$

1. Vérifier que f_n est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Écrire la matrice M_3 de f_3 relativement à la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$.
3. Est-ce que f_3 est injective? Déterminer le noyau de f_3 .
4. L'endomorphisme f_3 est-il diagonalisable?

Exercice 95 Diagonalisation dans $\mathbf{R}_n[X]$

Soient $n \in \mathbf{N}$, et g l'application définie sur $\mathbf{R}_n[X]$ par :

$$g(P) = (X-1)P' - P.$$

1. Justifier que g est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit le polynôme $P_k = (X-1)^k$.
a) Calculer $g(P_k)$.
b) En déduire que g est diagonalisable.
3. L'endomorphisme g est-il un automorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$?

Exercice 96 Polynômes de Lagrange

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux. Soit $f : \mathbf{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbf{R}^n$ définie par :

$$f(P) = (P(a_1), \dots, P(a_n))$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que f est injective. En déduire que f est bijective.
3. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Déterminer $f^{-1}(e_i)$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 97 Multiplication à gauche

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on définit l'application suivante :

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ M \longmapsto AM$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

Exercice 98 *Mesure de commutation*

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et φ l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ définie par $\varphi(M) = MA - AM$.

1. Vérifier que φ est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
3. L'endomorphisme φ est-il injectif? surjectif? Déterminer $\text{Im } \varphi$ et $\text{Ker } \varphi$.
4. Montrer que $\varphi^3 = 0$.
5. En déduire que φ n'est pas diagonalisable.

Utiliser l'exercice 58.

Exercice 99 *Espace fonctionnel*

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles définies sur $\mathbf{R}_+^*$, de degré inférieur ou égal à 4. On considère l'application φ qui à toute fonction P de E associe la fonction $\varphi(P)$ définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \varphi(P)(x) = P(x) + 2x^4 P\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
2. Exprimer φ^2 en fonction de φ et de l'identité. En déduire une relation vérifiée par les valeurs propres de φ .
3. Montrer que φ est bijective et déterminer son application réciproque.
4. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ . L'endomorphisme φ est-il diagonalisable?

12. Produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$

Exercice 100 Matrice symétrique réelle

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Sans calculs, justifier que A est diagonalisable.
2. Calculer les valeurs propres de A et donner les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
3. Donner des bases orthonormales des sous-espaces propres de A .
4. En déduire une matrice P inversible diagonalisant A .
5. Préciser P^{-1} .
6. On considère la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exprimer B à l'aide de A et I_3 .

En déduire le spectre de B .

Exercice 101 Plans dans $\mathbf{R}^4$

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. On pose $F = \text{Vect}(u, v)$ et $G = \text{Vect}(u, w)$ où $u = (-1, 1, -1, 1)$, $v = (1, 1, 1, 1)$ et $w = (1, -1, 0, 1)$.

1. Trouver une base orthonormale de F et de G .
2. Calculer la distance du vecteur $(1, 2, 3, 4)$ au sous-espace F .

Exercice 102 Base orthonormale de $\mathbf{R}^3$

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. On définit les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-2, 1, 1)$ et $v_3 = (0, -1, 1)$.

1. Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est orthogonale. En déduire une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de $\mathbf{R}^3$.
2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Déterminer les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 103 Projection sur un hyperplan de $\mathbf{R}^4$

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. On pose :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$$

1. Montrer que la famille composée de $v_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (-1, 0, 1, 0)$ et $v_3 = (-1, 0, 0, 1)$ est une base de F .
2. Déterminer un vecteur non nul w_2 de $\text{Vect}(v_1, v_2)$ orthogonal à v_1 .
Déterminer un vecteur non nul w_3 de F orthogonal à v_1 et à w_2 .

3. Justifier que (v_1, w_2, w_3) est une base de F .
4. On note p la projection orthogonale sur F . Étant donné un vecteur $v = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$, exprimer $p(v)$ en fonction de x, y, z et t .
5. Soit $D = \text{Vect}(1, 1, 1, 1)$. Quel lien y a-t-il entre D et F ?
6. Retrouver le résultat de la question 4. en déterminant l'expression de la projection orthogonale sur D .

Exercice 104 Endomorphisme de rang 1

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et u, v deux vecteurs non nuls de $\mathbf{R}^n$. On définit une application f sur $\mathbf{R}^n$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \quad f(x) = \langle u, x \rangle v.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$.
2. a) Montrer que f est de rang 1.
b) En déduire la dimension de $\text{Ker } f$.
c) Interpréter géométriquement $\text{Ker } f$.
3. a) Montrer que tout vecteur propre de f qui n'est pas associé à la valeur propre 0 est dans $\text{Im } f$.
b) Calculer $g = f \circ f$.
c) Montrer que g est nul si et seulement si $v \in \text{Ker } f$.
d) En déduire que f est diagonalisable si et seulement si v et u ne sont pas orthogonaux.
4. En notant U, V respectivement les matrices de u et v sur la base canonique, écrire la matrice A de f en fonction de U et V .
5. Calculer A^2 et retrouver le résultat de la question 3.c)

Exercice 105 Matrices positives

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On pose $S = M^T M$.

1. Montrer que S est une matrice symétrique.
2. Montrer que les valeurs propres de S sont positives.
Pour X vecteur propre de S , on pourra calculer $X^T S X$ de deux manières.
3. a) Montrer que $\text{Ker } S \subset \text{Ker } M$.
Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on pourra étudier $\|MX\|^2$.
b) En déduire que $\text{Ker } S = \text{Ker } M$.
4. Montrer que les valeurs propres de S sont strictement positives si, et seulement si, M est inversible.

13. Théorèmes limites

Exercice 106 $\mathcal{B}(n, p) \sim \mathcal{P}(np)$

Dans une population, une personne sur cent est centenaire. Quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi 100 personnes choisies au hasard ? Et parmi 200 personnes ?

On utilisera l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

Exercice 107 $\mathcal{B}(n, p) \sim \mathcal{N}(np, npq)$

On jette 12 000 fois un dé équilibré.

Estimer par un théorème d'approximation la probabilité que le nombre de 6 obtenus soit compris entre 1 800 et 2 100, puis qu'il soit égal à 2 000.

Exercice 108 Modélisation à trouver

Une entreprise compte 300 employés. Chacun d'eux téléphone en moyenne 6 minutes par heure.

Quel est le nombre de lignes téléphoniques que l'entreprise doit installer pour que la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant soit au plus égal à 2,5% ?

Exercice 109 Les crocodiles

Un commando de soldats doit traverser une rivière, heureusement infestée de crocodiles. La probabilité qu'un soldat soit dévoré au cours de la traversée est de 1/10. Combien faut-il envoyer de soldats pour que la probabilité d'avoir au moins 300 personnes sur l'autre rive soit supérieure à 95% ?

Exercice 110 Avec Markov

Soit X une variable aléatoire d'espérance nulle et de variance σ^2 .

- Soient $a > 0$ et $t > 0$.
 - Calculer $\mathbf{E}((X+t)^2)$ en fonction de σ et t .
 - Montrer alors que $\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + t^2}{(a+t)^2}$.
- En déduire que :

$$\forall a > 0, \mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}.$$

Exercice 111 Avec Bienaymé-Tchebychev

Soit $p \in]0, 1[$. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p .

Pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, on pose $Y_i = X_i + X_{i+1}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $M_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$.

- Rappeler la loi faible des grands nombres.
- Les variables aléatoires Y_n sont-elles indépendantes ?
- Calculer l'espérance et la variance de M_n .
- Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|M_n - 2p| > \varepsilon) = 0.$$

Exercice 112 Avec le TCL

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne m et de variance $\sigma^2 \neq 0$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

- Rappeler la loi faible des grands nombres puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(M_n \leq x)$ dans les cas où $x < m$ et $x > m$.
- En utilisant le théorème central limite, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(M_n \leq m) = \frac{1}{2}$.
- Montrer que (M_n) converge en loi vers une variable aléatoire de loi à préciser.

Exercice 113 Test statistique

Une roulette possède 37 numéros. Sur 10 000 parties, le zéro est sorti 298 fois. Tester au risque d'erreur 5% si la roulette est bien équilibrée.

Exercice 114 Test de conformité

Lors d'un sondage sur 100 personnes interrogées, 60 pensent voter pour un(e) candidat(e) donné(e). On modélise le choix par un échantillon $(X_1, \dots, X_{100})$ de variables indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p .

- Déterminer l'espérance et la variance de la fréquence empirique $F = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i$.
- On note F^* la fréquence empirique centrée réduite. Par quelle loi peut-on approcher celle de F^* ?
- Calculer u tel que $\mathbf{P}(|F^*| \leq u) \geq 0,99$, puis montrer que la probabilité que p appartienne à l'intervalle

$$IC = \left[F - u \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; F + u \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

où n est un entier à préciser, est supérieure à 0,99.

- Montrer que : $\forall p \in [0, 1], p(1-p) \leq 1/4$.
En déduire que la probabilité que p appartienne à $[F - u/20 ; F + u/20]$ est supérieure à 0,99.
- Que pensez-vous des chances du(de la) candidat(e) concerné(e) d'être réellement élu(e) ?
Si on avait utilisé un échantillon de 1000 personnes et que l'on avait obtenu la même fréquence empirique, votre réponse serait-elle modifiée ?

14. Fonctions de deux variables

Exercice 115 Calculs de dérivées partielles

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes, et tracer leur domaine de définition :

$$1. f(x, y) = \frac{x^3 y + y^2 x}{x + y}.$$

$$2. f(x, y) = \ln \left(1 + \frac{x}{y} \right).$$

$$3. f(x, y) = \frac{\ln x}{x^2 + y^2 - 9}.$$

$$4. f(x, y) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}.$$

$$5. f(x, y) = \sqrt{xy}.$$

Exercice 116 d ronds et d droits

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + \frac{x}{y^2}$ pour $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$. Calculer :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{d}{dx}(f(x, x)), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, x),$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, x), \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, x) \right).$$

Exercice 117 Dérivée d'une composée

Soient $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$, et g définie sur $\mathbf{R}^2$ par : $g(x, y) = f(xy, x - y)$.

Exprimer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g en fonction de celles de f .

Exercice 118 Équation aux dérivées partielles

Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2xy + z^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3xz^2 \end{cases}$$

Exercice 119 Changement de variables sur $\mathbf{R}^2$

On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$(E) \quad 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

On souhaite intégrer (E) en utilisant le changement de variables $u = x + 2y$ et $v = x - y$.

- Montrer que l'on définit bien une fonction g de $\mathbf{R}^2$ à valeurs réelles en posant :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x, y) = g(x + 2y, x - y)$$

- Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$ et exprimer les dérivées partielles secondes de f en fonction de celles de g .
- Montrer alors que l'équation (E) équivaut à :

$$(F) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$$

- En déduire les fonctions f solutions de (E).

Exercice 120 Recherche d'extrema

Étudier les extrema des fonctions suivantes :

$$1. f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3$$

$$2. f(x, y) = 2x^3 + 3x^2 + y^2 - 2y$$

$$3. f(x, y) = x^3 + xy + y^3$$

Exercice 121 Forme quadratique

Soient a, b, c trois réels tels que $(a, c) \neq (0, 0)$. On considère la fonction q définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$q(x, y) = ax^2 + cy^2 + 2bxy.$$

On définit également le sous-ensemble S de $\mathbf{R}^2$ par : $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Enfin, on définit sur $I = [0, 2\pi]$ la fonction φ par :

$$\varphi(t) = q(\cos t, \sin t).$$

- Justifier que φ admet un minimum m et un maximum M absolus sur l'intervalle I .
En déduire que $q(S) = [m, M]$.

- Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par : $f(x, y) = q(x, y) - m\|X\|^2$ où $X = (x, y)$.
Montrer que :

$$\forall X \neq (0, 0) \quad f(x, y) = \|X\|^2 f\left(\frac{X}{\|X\|}\right).$$

- En déduire que f est positive sur $\mathbf{R}^2$.
- Calculer les dérivées partielles de f .