

Vade Mecum Analyse Bio-sup

Lycée Chateaubriand
Année scolaire 2026/2027

Table des matières

Trigonométrie.....	page 2
Nombres complexes.....	page 5
Suites réelles.....	page 8
Suites récurrentes usuelles.....	page 12
Fonctions : limites, continuité.....	page 14
Fonctions dérivables.....	page 17
Fonctions usuelles.....	page 19
Analyse asymptotique.....	page 22
Intégration sur un segment.....	page 23
Équations différentielles.....	page 26

I Trigonométrie

1 Domaines de définition

Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbf{R}$.

La fonction tan est définie sur $D_{\tan} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.

2 Régularités

Les fonctions sin, cos et tan sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition.

3 Dérivées

- $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.
 - $\forall t \in D_{\tan}, \tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ et $\tan' t = 1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$
 - Si u est une fonction dérivable sur un intervalle réel I , alors $\sin(u)$ et $\cos(u)$ sont dérivables sur I et : $(\sin u)' = u' \times \cos u$ et $(\cos u)' = -u' \times \sin u$.
- Si de plus u est à valeurs dans $D_{\tan}$, alors $\tan(u)$ est dérivable sur I et :

$$(\tan u)' = u' \times (1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2(u)}.$$

4 Encadrements $\forall t \in \mathbf{R}, -1 \leq \sin t \leq 1$ et $-1 \leq \cos t \leq 1$.

5 Pythagore $\forall t \in \mathbf{R}, \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$.

6 Symétries

- sin et cos sont 2π -périodiques, tan est π -périodique.
- sin et tan sont impaires, cos est paire.
- $\forall t \in \mathbf{R}, \sin(t + \pi) = -\sin t$ et $\cos(t + \pi) = -\cos t$.
- $\forall t \in \mathbf{R}, \sin(\pi - t) = \sin t$ et $\cos(\pi - t) = -\cos t$.
- $\forall t \in \mathbf{R}, \sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos t$ et $\cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\sin t$.
- $\forall t \in \mathbf{R}, \sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$ et $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$.

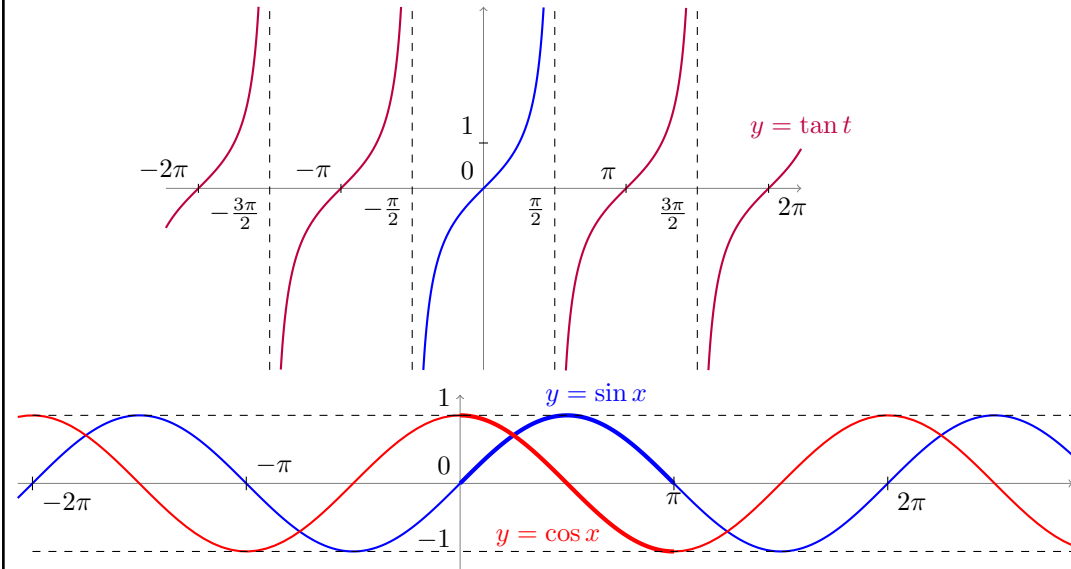
7 Équivalents et DL

- $\sin(t) \underset{0}{\sim} t, \tan(t) \underset{0}{\sim} t$ et $\cos(t) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}t^2$.
- $\sin(t) = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4)$ et $\cos(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^3)$.

8 Valeurs remarquables

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan t$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

9 Courbes représentatives



10 Formulaire de trigonométrie

Formules d'addition

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \end{cases}$$

Formules de duplication

$$\begin{cases} \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ \quad = 2\cos^2(a) - 1 \\ \quad = 1 - 2\sin^2(a) \\ \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \end{cases}$$

Formules de linéarisation

$$\begin{cases} \cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \\ \sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2} \end{cases}$$

11 Trigonométrie réciproque

- sin réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers $[-1, 1]$.

Sa bijection réciproque s'appelle **Arccsinus**.

$$\forall x \in [-1, 1], \forall t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \sin(t) = x \Leftrightarrow t = \text{Arccsin}(x)$$

- cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$.

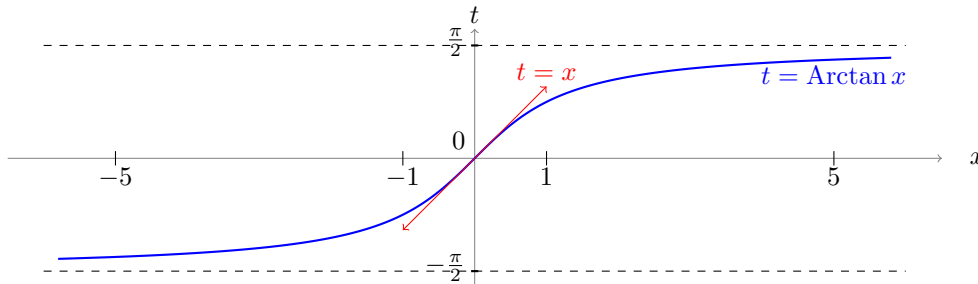
Sa bijection réciproque s'appelle **Arccosinus**.

$$\forall x \in [-1, 1], \forall t \in [0, \pi], \cos(t) = x \Leftrightarrow t = \text{Arccos}(x)$$

- tan réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbf{R}$.

Sa bijection réciproque s'appelle **Arctangente**.

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \tan(t) = x \Leftrightarrow t = \text{Arctan}(x)$$



Arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et :

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{Arctan } u)' = \frac{u'}{1+u^2} \quad \text{Arctan } x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^6)$$

II Nombres complexes

1 Définitions

i est un nombre vérifiant $i^2 = -1$.

Un **nombre complexe** est de la forme $z = a + ib$ où a, b sont des réels.

$a + ib$ est la **forme algébrique** de z ,

a est sa **partie réelle** et b sa **partie imaginaire**.

$\mathbf{C} = \{a + ib, a, b \in \mathbf{R}\}$ est l'ensemble des nombres complexes.

$i\mathbf{R} = \{ib, b \in \mathbf{R}\}$ est l'ensemble des **imaginaires purs**.

Addition dans $\mathbf{C}$: $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$

Multiplication dans $\mathbf{C}$: $(a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

Conjugué dans $\mathbf{C}$: $\overline{a + ib} = a - ib$

Module dans $\mathbf{C}$: $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Le module prolonge à $\mathbf{C}$ la valeur absolue dans $\mathbf{R}$.

2 Propriétés de la conjugaison

$$\begin{array}{l} * \overline{\overline{z}} = z \\ * \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \\ * \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'} \\ * \forall n \in \mathbf{N}, \overline{z^n} = (\overline{z})^n \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} * \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \quad (z \neq 0) \\ * \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}} \quad (z \neq 0) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} * z + \overline{z} = 2\text{Re}(z) \\ * z - \overline{z} = 2i\text{Im}(z) \\ * z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \overline{z} \\ * z \in i\mathbf{R} \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0 \end{array}$$

3 Propriétés du module

$$\begin{array}{l} * |z| \in \mathbf{R}_+ \\ * |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0. \\ * \begin{cases} |\text{Re}(z)| \leq |z| \\ |\text{Im}(z)| \leq |z| \end{cases} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} * |\overline{z}| = |z| \\ * |z \times z'| = |z| \times |z'| \\ * |z^n| = |z|^n \quad (n \in \mathbf{N}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} * \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \quad (z \neq 0) \\ * \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|} \quad (z \neq 0) \\ * |z + z'| \leq |z| + |z'| \end{array}$$

4 Autres propriétés

* Forme algébrique de l'inverse : si $z = a + ib \neq 0$, alors $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

* Identité remarquable : $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2, a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

$$\boxed{|z|^2 = z \overline{z}} \quad \text{ou} \quad \boxed{|z| = \sqrt{z \overline{z}}}$$

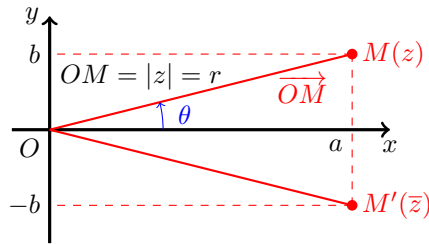
* $\forall z \in \mathbf{C}, \text{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ et $\text{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$

5 Aspect géométrique

Dans le **plan complexe**, le point $M(a, b)$ est l'**image** du complexe $z = a + ib$.
Ce complexe z est l'**affixe** du point M .

Le module $|z|$ est la distance $OM : |z| = OM = ||\overrightarrow{OM}||$.

L'angle $\theta = (Ox, \overrightarrow{OM})$ est un **argument** de z .



Forme trigonométrique d'un complexe :

$$z = |z| \times (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Notation d'Euler : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Forme exponentielle d'un complexe : $z = |z| \times e^{i\theta} = re^{i\theta}$

6 Propriétés de la forme exponentielle

* **Égalité** sous forme exponentielle :

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow r = r' \text{ et } \theta = \theta' + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

* **Conjugué** : $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$ **Inverse** : $\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$

* **Formules d'Euler** : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

* **Produit** : $(re^{i\theta}) \times (r'e^{i\theta'}) = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ **Quotient** : $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

* **Puissances** : $(re^{i\theta})^n = r^n e^{ni\theta}$

* **Formule de Moivre** : $\forall n \in \mathbf{Z}, (re^{i\theta})^n = r^n e^{ni\theta}$

$$\text{donc } (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

* **Liens entre formes algébrique et géométrique** : $z = a + ib = re^{i\theta}$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \cos \theta = \frac{a}{r} \quad \sin \theta = \frac{b}{r} \quad a = r \cos \theta \quad b = r \sin \theta$$

7 Techniques de calcul dans C

a Expressions en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$

$$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = e^{ni\theta} = (e^{i\theta})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos \theta)^k (i \sin \theta)^{n-k}$$

(**binôme de Newton**) donc en **identifiant** parties réelles et imaginaires, on obtient les expressions de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

b Linéarisation de $(\cos^p(m\theta)) \times (\sin^q(n\theta))$

$$(\cos^p(m\theta)) \times (\sin^q(n\theta)) = \left(\frac{e^{mi\theta} + e^{-mi\theta}}{2} \right)^p \times \left(\frac{e^{ni\theta} - e^{-ni\theta}}{2i} \right)^q \text{ d'après Euler}$$

puis on développe (formule de Newton) et on regroupe (Euler).

On peut enfin exprimer le résultat sans puissance (utile par exemple pour déterminer une primitive).

c Transformation de Fresnel

Soit $z = a + ib = re^{i\theta} \in \mathbf{C}^*$. Alors : $\forall t \in \mathbf{R}, a \cos t + b \sin t = r \cos(t - \theta)$.

Ceci montre qu'une **combinaison linéaire** de $\cos$ et $\sin$ est encore une fonction trigonométrique.

d Équations du second degré dans C

Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$ avec $a \neq 0$. L'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$ admet :

- 2 solutions réelles $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$
- une unique solution-double (réelle) $z_0 = -\frac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$
- 2 solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \overline{z_1}$ si $\Delta < 0$.

Factorisation : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ si $\Delta \neq 0$
 $= a(z - z_0)^2$ si $\Delta = 0$.

Relations coefficients-racines : $z_1 + z_2$ ou $2z_0 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 \times z_2$ ou $(z_0)^2 = \frac{c}{a}$.

e Racines n -ème dans C

$Z = A + iB = Re^{i\varphi}$ est fixé, $n \in \mathbf{N}^*$. Soit (E) l'équation : $z^n = Z$.

On cherche z sous forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$.

On a donc : $(E) \Leftrightarrow r^n e^{ni\theta} = Re^{i\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} r = R^{1/n} \\ \theta = \varphi/n + 2k\pi/n, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$

Cas où $n = 2$: on peut aussi chercher $z = a + ib$ sous forme algébrique :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = A & (1) \\ 2ab = B & (2) \\ a^2 + b^2 = \sqrt{A^2 + B^2} & (3) \end{cases}$$

En effectuant $(1) + (3)$ on trouve a^2 et on peut conclure.

III Suites réelles

1 Vocabulaire

Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est dite :

- **positive** (*resp : strictement positive*) si :
 $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq 0$ (*resp : $u_n > 0$*)
- **négative** (*resp : strictement négative*) si :
 $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq 0$ (*resp : $u_n < 0$*)
- **périodique** de période $T \in \mathbf{N}^*$ si :
 $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+T} = u_n$
- **majorée** si :
 $\exists M \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq M$
- **minorée** si :
 $\exists m \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq m$
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, ce qui équivaut à dire que $(|u_n|)_n$ est majorée
- **croissante** (*resp : strictement croissante*) si :
 $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} \geq u_n$ (*resp : $u_{n+1} > u_n$*)
- **décroissante** (*resp : strictement décroissante*) si :
 $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} \leq u_n$ (*resp : $u_{n+1} < u_n$*)
- **monotone** (*resp : strictement monotone*) si elle est croissante ou décroissante (*resp : strictement croissante ou strictement décroissante*).

2 Suites extraites

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle. On appelle :

- **suite extraite de rangs pairs** la suite (v) définie par :
 $\forall n \in \mathbf{N}, v_n = u_{2n}$
- **suite extraite de rangs impairs** la suite (w) définie par :
 $\forall n \in \mathbf{N}, w_n = u_{2n+1}$

3 Nature d'une suite (comportement asymptotique)

* $(u_n)_n$ **converge** vers $\ell \in \mathbf{R}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

* $(u_n)_n$ **diverge** vers $+\infty$ (*resp : $-\infty$*) si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbf{R}, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A \quad (\text{resp : } u_n \leq A)$$

4 Premières propriétés

- * *Unicité de la limite* : Si une suite converge, alors sa limite est unique.
- * La nature d'une suite est inchangée si on modifie un nombre *fini* de termes.
- * *Théorème des suites extraites* : Une suite est convergente si et seulement si ses suites extraites de rangs pairs et impairs convergent vers la même limite.
- * Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.

5 Opérations sur les limites

ℓ et ℓ' désignent des réels.

* **Somme**

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

* **Produit**

$\lim u_n$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n \times v_n)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

* **Inverse**

$\lim u_n$	$\ell \neq 0$	0	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	FI	$+\infty$	$-\infty$	0

6 Propriétés liées à l'ordre

a. Signe d'une suite de limite non nulle :

Si $\lim u_n = \ell \in \mathbf{R}^*$, alors (u_n) est positive (si $\ell > 0$) ou négative (si $\ell < 0$) à partir d'un certain rang.

b. Passage à la limite dans une inégalité :

(u_n) et (v_n) convergent et : $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$ ou $u_n < v_n$

Alors, on a : $\lim u_n \leq \lim v_n$

c. Théorème des gendarmes : $(u_n), (v_n)$ et (w_n) vérifient :

- les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbf{R}$
- $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$

Alors, la suite (v_n) converge, et sa limite est ℓ .

d. Produit d'une suite bornée par une suite convergente vers 0 :

Si (u_n) est bornée et (v_n) converge vers 0, alors $(u_n \times v_n)$ converge vers 0.

e. Théorème de comparaison : Supposons : $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$.

- Si la suite (u_n) diverge vers $+\infty$, alors la suite (v_n) diverge vers $+\infty$.
- Si la suite (v_n) diverge vers $-\infty$, alors la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

f. Théorème de convergence monotone :

Toute suite réelle monotone possède une limite (finie ou infinie).

- Toute suite réelle (u_n) croissante et majorée converge
et $\lim u_n = \sup \{u_n, n \in \mathbf{N}\}$.
- Toute suite réelle (u_n) croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite réelle (u_n) décroissante et minorée converge
et $\lim u_n = \inf \{u_n, n \in \mathbf{N}\}$.
- Toute suite réelle (u_n) décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

7 Suites adjacentes

Deux suites sont dites **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre est décroissante, et leur différence converge vers 0.

* *Théorème des suites adjacentes*

Deux suites adjacentes sont convergentes, et leurs limites sont égales.

De plus, on a (en appelant (u_n) la suite croissante) :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_0 \leq u_n \leq \ell \leq v_n \leq v_0$$

8 Comparaison des suites

(u_n) est **négligeable** devant (v_n) ssi : $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$. On note : $u_n = o(v_n)$.

(u_n) est **équivalente** à (v_n) ssi : $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$. On note : $u_n \sim v_n$.

Deux suites équivalentes sont **de même nature**.

Opérations sur les équivalents : $(a_n), (b_n), (c_n)$ et (d_n) sont quatre suites réelles et α est un réel fixé.

- | | |
|--|--|
| • si $a_n = o(b_n)$, alors $a_n + b_n \sim b_n$ | • si $a_n \sim b_n$, alors $(a_n)^\alpha \sim (b_n)^\alpha$ |
| • $a_n \sim b_n$ si et seulement si $b_n \sim a_n$ | • si $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$,
alors $a_n c_n \sim b_n d_n$ |
| • si $a_n \sim b_n$, alors $\alpha a_n \sim \alpha b_n$ | |
| • si $a_n \sim b_n$ et $b_n \sim c_n$, alors $a_n \sim c_n$ | |
| • si $a_n \sim b_n$, alors $ a_n \sim b_n $ | • si $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$, alors $\frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n}$ |

Croissances comparées : On note ici $\ll$ le fait d'être *négligeable devant*.

Soient $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$ trois réels. Alors on a :

$$(\ln n)^\alpha \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

Équivalents usuels en 0 : (u_n) est une suite réelle convergente vers 0. Alors :

- | | |
|--|--|
| • $\sin u_n \sim u_n$ | • $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ |
| • $\tan u_n \sim u_n$ | • $e^{u_n} - 1 \sim u_n$ |
| • $\cos u_n - 1 \sim -\frac{(u_n)^2}{2}$ | • $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n \quad (\forall \alpha \in \mathbf{R})$ |

Autre équivalent usuel :

Une suite polynomiale est équivalente à son monôme dominant.

Si $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$ avec $a_d \neq 0$, alors $P(n) \sim a_d n^d$

IV Suites récurrentes usuelles

1 Suites arithmétiques

Soit $r \in \mathbf{K}$. On appelle **suite arithmétique de raison** r toute suite (u_n) définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n + r$

Terme général :
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbf{N}, u_n = u_0 + nr \\ \forall n, p \in \mathbf{N}, u_n = u_p + (n - p)r \end{cases}$$

Somme de termes consécutifs :
$$\sum_{k=p}^n u_k = \frac{(u_p + u_n)(n - p + 1)}{2} \quad \text{si } p \leq n$$

On retient : (nombre de termes de la somme) $\times$ (moyenne des termes extrêmes)

Nature : soit (u_n) une suite arithmétique **réelle** de raison r .

- * si $r > 0$, alors $\lim u_n = +\infty$
- * si $r < 0$, alors $\lim u_n = -\infty$
- * si $r = 0$, alors (u_n) est constante, et converge vers u_0 .

2 Suites géométriques

Soit $q \in \mathbf{K}$. On appelle **suite géométrique de raison** q toute suite (u_n) définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = q \times u_n$

Terme général :
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbf{N}, u_n = u_0 \times q^n \\ \forall n, p \in \mathbf{N}, u_n = u_p \times q^{n-p} \quad (\text{si } q \neq 0 \text{ ou } n \geq p) \end{cases}$$

Somme de termes consécutifs :

Pour $p \leq n$, on a :
$$\sum_{k=p}^n u_k = \begin{cases} u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n - p + 1)u_0 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Retenir si $q \neq 1$: $S = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$

Nature : soit (u_n) une suite géométrique **réelle** de raison q .

Si $u_0 = 0$, alors (u_n) est la suite nulle. Sinon :

- $$\left. \begin{array}{l} * \text{ si } |q| < 1, \text{ alors } \lim u_n = 0 \\ * \text{ si } |q| > 1, \text{ alors } \lim |u_n| = +\infty \\ * \text{ si } q = 1, \text{ alors } (u_n) \text{ est constante, et converge vers } u_0 \\ * \text{ si } q \leq -1, \text{ alors } (u_n) \text{ diverge de seconde espèce} \\ * \text{ si } q > 1, \text{ alors } \lim u_n = \pm\infty \text{ selon le signe de } u_0. \end{array} \right\} \text{ encore valable dans } \mathbf{C}$$

3 Suites arithmético-géométriques

Soient $a, b \in \mathbf{K}$. On appelle **suite arithmético-géométrique** toute suite (u_n) définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = a \times u_n + b$

Suite auxiliaire : Si $a \neq 1$, soit ℓ l'unique point-fixe de la relation de récurrence : $\ell = a\ell + b$. Alors la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbf{N}, v_n = u_n - \ell$, est géométrique de raison a .

Terme général : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = v_n + \ell = (u_0 - \ell)a^n + \ell$

En particulier, si $|a| < 1$, alors $\lim u_n = \ell$.

4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Une suite (u_n) vérifie une **relation de récurrence linéaire d'ordre 2** lorsqu'il existe $a, b \in \mathbf{K}$, avec $b \neq 0$, tels que : $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Équation caractéristique : si $a, b \in \mathbf{R}$, on pose $(E) : r^2 = ar + b \Leftrightarrow r^2 - ar - b = 0$ de discriminant $\Delta = a^2 + 4b$.

- si $\Delta > 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions réelles r_1 et r_2 .
- si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une solution-double réelle r_0 .
- si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées $z = re^{i\theta}$ et $\bar{z} = re^{-i\theta}$.

Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients réels :

- si $\Delta > 0, \exists A, B \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n = A \times (r_1)^n + B \times (r_2)^n$.
- si $\Delta = 0, \exists A, B \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n = (An + B) \times (r_0)^n$
- si $\Delta < 0, \exists A, B \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n = r^n (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$

Méthode : on détermine A, B en résolvant le système donné par les 2 premiers termes de la suite.

V Fonctions : limites, continuité

1 Limites

* f a pour limite $\ell \in \mathbf{R}$ en $x_0 \in \mathbf{R}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

* f a pour limite $\pm\infty$ en $x_0 \in \mathbf{R}$ si et seulement si :

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \begin{cases} f(x) \geq M & (\lim_{x_0} f = +\infty) \\ f(x) \leq M & (\lim_{x_0} f = -\infty) \end{cases}$$

* f a pour limite $\ell \in \mathbf{R}$ en $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]\alpha, +\infty[, |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

* f a pour limite $\pm\infty$ en $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists \alpha \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]\alpha, +\infty[, \begin{cases} f(x) \geq M & (\lim_{+\infty} f = +\infty) \\ f(x) \leq M & (\lim_{+\infty} f = -\infty) \end{cases}$$

Méthode : pour déterminer une limite, on utilise les règles opératoires.

Il faut savoir identifier les éventuelles **formes indéterminées**, du type :

$$\infty - \infty, 0 \times \infty, \frac{\ell}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^\infty, \infty^0 \text{ et } 0^0$$

Pour ces 3 dernières formes indéterminées, on utilise la forme exponentielle.

Pour lever une indétermination, on utilise : un résultat de croissances comparées, une règle sur les fonctions polynomiales ou rationnelles, un équivalent, un DL.

* **Règles des fonctions polynomiales ou rationnelles** :

Les limites en $\pm\infty$ sont celles du monôme dominant ou du quotient des monômes dominants. Les limites en 0 sont celles du monôme de plus petit degré, ou du quotient des monômes de plus petit degré.

* **Croissances comparées** :

$$\begin{aligned} \forall \alpha > 0, \forall \beta > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty & \quad \left| \begin{array}{l} \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall \beta > 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^{\beta x} = 0 \\ \forall \alpha > 0, \forall \beta > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0 \end{array} \right. \\ \forall \alpha > 0, \forall \beta > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 & \end{aligned}$$

2 Propriétés des limites $x_0 \in \mathbf{R}$ ou $x_0 = \pm\infty$, et $\ell, \ell' \in \mathbf{R}$.

Passage à la limite dans une inégalité

- Si $\lim_{x_0} f = \ell$ et si $f \geq 0$ ou $f > 0$ sur un voisinage de x_0 , alors $\ell \geq 0$.
- Si $\lim_{x_0} f = \ell$, $\lim_{x_0} g = \ell'$, et $f \leq g$ ou $f < g$ sur un voisinage de x_0 , alors $\ell \leq \ell'$.

Théorème d'encadrement (des gendarmes)

Si $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = \ell$ et si $f \leq g \leq h$ sur un voisinage de x_0 , alors $\lim_{x_0} g = \ell$.

Théorème de comparaison

- Si $\lim_{x_0} f = +\infty$ et $f \leq g$, alors $\lim_{x_0} g = +\infty$.
- Si $\lim_{x_0} g = -\infty$ et $f \leq g$, alors $\lim_{x_0} f = -\infty$.

Théorème de la limite monotone

Soit f une fonction **monotone** sur un intervalle de bornes a et b .

Alors f admet en a et en b des limites finies ou infinies.

3 Négligeabilité, équivalence

* f est **négligeable** devant g en x_0 ssi : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note : $f = o(g)$.

* f et g sont **équivalentes** en x_0 ssi : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note : $f \sim_{x_0} g$.

- Deux fonctions équivalentes ont même comportement asymptotique : si $f \sim_{x_0} g$ et $\lim_{x_0} g = \ell \in \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, alors $\lim_{x_0} f = \ell$.

- On peut multiplier des équivalents : si $f \sim_{x_0} g$ et $h \sim_{x_0} k$, alors $fh \sim_{x_0} gk$.

- On peut diviser des équivalents : si $f \sim_{x_0} g$ et $h \sim_{x_0} k$, ($h \neq 0$), alors $\frac{f}{h} \sim_{x_0} \frac{g}{k}$.

- On peut élever à une puissance α **fixée** un équivalent :

si $f \sim_{x_0} g$ avec $f > 0$ ou $g > 0$ sur un voisinage de x_0 , alors $f^\alpha \sim_{x_0} g^\alpha$.

- On peut composer à **droite** un équivalent :

si $f \sim_{x_0} g$ et si $\lim_{x_1} \varphi = x_0$, alors $f \circ \varphi \sim_{x_1} g \circ \varphi$.

- Règle de la souris et de l'éléphant : si $g = o(f)$, alors $f + g \sim_{x_0} f$

4 Équivalents usuels

$$\begin{array}{l|l|l} \sin(t) \sim_0 t & \tan(t) \sim_0 t & \ln(1+t) \sim_0 t \\ \cos(t) - 1 \sim_0 -\frac{1}{2}t^2 & \exp(t) - 1 \sim_0 t & (1+t)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha t \end{array}$$

Une fonction polynomiale ou rationnelle équivaut en $\pm\infty$ à son monôme de plus haut degré (ou au quotient de ses monômes de plus hauts degrés), et en 0 à son monôme de plus bas degré (ou au quotient de ses monômes de plus bas degrés).

5 Continuité

* f est **continue** en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ si et seulement si : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

* f se prolonge par continuité en $x_0 \notin \mathcal{D}_f$ si f possède une limite ℓ **finie** en x_0 .

On pose alors : $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}_f \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$

6 Théorèmes des fonctions continues

Théorème des bornes atteintes

Soit f une fonction **continue** sur un **segment** $[a, b]$.

Alors f est **bornée** et atteint ses bornes :

$$\exists c, d \in [a, b] \mid \forall x \in [a, b], f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

L'image d'un **intervalle** par une fonction **continue** est un intervalle.

$$\forall a, b \in I, \forall y \in \mathbf{R}, f(a) \leq y \leq f(b) \Rightarrow \exists c \in I \mid y = f(c).$$

Théorème de la bijection continue

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** définie sur un **intervalle** I . Alors f réalise une **bijection** de I vers $f(I)$.

Sa bijection réciproque f^{-1} est continue de $f(I)$ vers I , strictement monotone et de même monotonie que f .

De plus, si I est un intervalle de bornes a et b , alors $f(I)$ est un intervalle de bornes $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$, de même type que I (ouvert, fermé, semi-ouvert).

VI Fonctions dérivables

1 Définitions

* f est **dérivable** en $a \in \mathcal{D}_f$ si et seulement si $\Delta_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite **finie** quand h tend vers 0 ($h \neq 0$). On note alors cette limite $f'(a)$.

* $f'(a)$ est le **nombre dérivé** de f en a . La fonction $a \mapsto f'(a)$ est la **fonction dérivée** de f .

* Soit $k \in \mathbf{N}$. Une fonction **de classe** $\mathcal{C}^k$ est une fonction k -fois dérivable, et dont la k -ème dérivée est continue. On note : $f \in \mathcal{C}^k(I)$.

* $\mathcal{C}^0(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}$,

* $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbf{R}$, et dont la dérivée f' est continue sur $\mathbf{R}$.

* $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur $\mathbf{R}$.

2 Propriétés

* f est dérivable en $a \in \mathcal{D}_f$ si et seulement la courbe représentative de f admet en son point d'abscisse a une **tangente non verticale** $\mathcal{T}$.

Dans ce cas, $f'(a)$ est le coefficient-directeur de $\mathcal{T}$, d'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

* Si f est dérivable en a , alors f est continue en a . La réciproque est fausse.

* Toutes les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition, **SAUF** :

- la fonction partie entière, discontinue sur $\mathbf{Z}$,
- la fonction valeur absolue, continue mais non dérivable en 0,
- les fonctions racines n -ème, continues mais non dérivables en 0.

* Les opérations usuelles sur des fonctions dérivables produisent des fonctions dérivables. Si u et v sont dérivables (et quand ces opérations existent) :

$$\begin{array}{l|l|l} (u+v)' = u' + v' & (v \circ u)' = u' \times v' \circ u & (\sin u)' = u' \cos u \\ (u \times v)' = u'v + uv' & (u^n)' = nu'u^{n-1} & (\tan u)' = u' \times (1 + \tan^2 u) \\ \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} & (e^u)' = u' \times e^u & = \frac{u'}{\cos^2 u} \\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} & (\ln u)' = \frac{u'}{u} & (\text{Arctan } u)' = \frac{u'}{1 + u^2} \\ & (\cos u)' = -u' \sin u & \end{array}$$

* **Dérivée d'une bijection réciproque :**

Si f est dérivable et bijective, et si de plus $f'(a) \neq 0$, alors sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et on a : $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$

3 Théorèmes des fonctions dérivables

Théorème de Rolle

Soit f **continue** sur un segment $[a, b]$ et **dérivable** sur l'ouvert $]a, b[$.
Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis (TAF)

Soit f **continue** sur un segment $[a, b]$ et **dérivable** sur l'ouvert $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Inégalité des accroissements finis (IAF)

Soit f **continue** sur un segment $[a, b]$ et **dérivable** sur l'ouvert $]a, b[$.

On suppose qu'il existe un réel M tel que : $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq M$.

Alors : $|f(b) - f(a)| \leq M \cdot |b - a|$

VII Fonctions usuelles

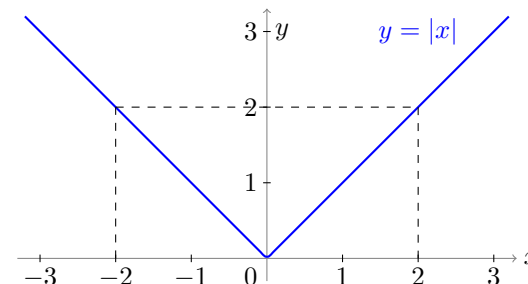
1 Fonction valeur absolue

$$\forall x \in \mathbf{R}, |x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\forall x, x' \in \mathbf{R}, |xx'| = |x| \times |x'|$$

$$\forall x, x' \in \mathbf{R}, |x + x'| \leq |x| + |x'|$$

$$\forall \alpha > 0, |x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha \\ \Leftrightarrow x \in [-\alpha, \alpha]$$



2 Fonction partie entière

La partie entière d'un réel x est l'unique entier n tel que : $n \leq x < n + 1$.

On note : $n = \lfloor x \rfloor$. Elle est **discontinue** sur $\mathbf{Z}$ et continue sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

3 Fonctions exponentielles

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbf{R}$, égale à sa dérivée, et valant 1 en 0.

Elle est **strictement croissante** et **strictement positive** sur $\mathbf{R}$.

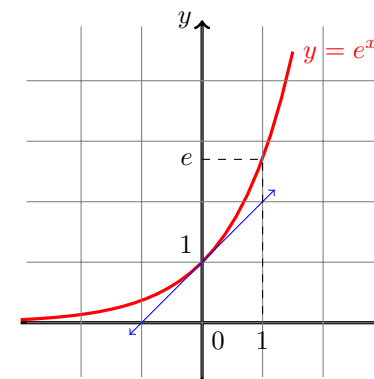
On a : $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e \approx 2,718$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$$

On note : $\forall x \in \mathbf{R}, \exp(x) = e^x$

On a pour tous réels a, b et n :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \\ e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad e^{na} = (e^a)^n$$



Exponentielle de base $a > 0$: $\forall x \in \mathbf{R}, a^x = e^{x \ln(a)}$

FORME EXPONENTIELLE

Méthode : on l'utilise dès que, dans une expression, une puissance est variable.

4 Fonctions logarithmes

La fonction **logarithme népérien** est la primitive sur $\mathbf{R}_+^*$ de la fonction inverse

$$\text{qui s'annule en 1 : } \forall x > 0, \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

$\ln$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

$$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\ln(1) = 0 \text{ et } \ln(e) = 1$$

$$\lim_{0^+} \ln = -\infty \text{ et } \lim_{+\infty} \ln = +\infty$$

On a pour tous réels $a, b > 0$ et n :

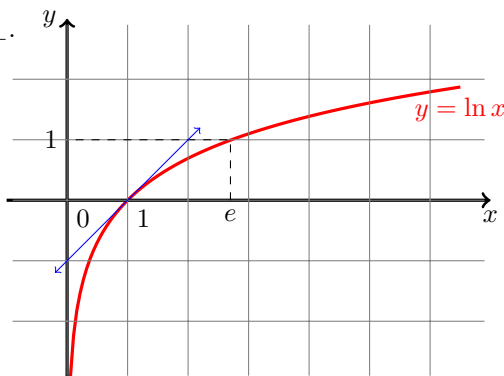
$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(a^n) = n \ln(a)$$

Logarithme de base 10 : $\forall x > 0, \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ (Logarithme décimal)



5 Fonctions puissances

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. p_α est la fonction **puissance** α , d'expression $p_\alpha(x) = x^\alpha$.

* Si $\alpha \in \mathbf{N}$, alors p_α est une fonction polynomiale, définie sur $\mathbf{R}$.

* Si $\alpha \in \mathbf{Z}_-^*$, p_α est une fonction rationnelle, définie sur $\mathbf{R}^* : \forall x \neq 0, x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$.

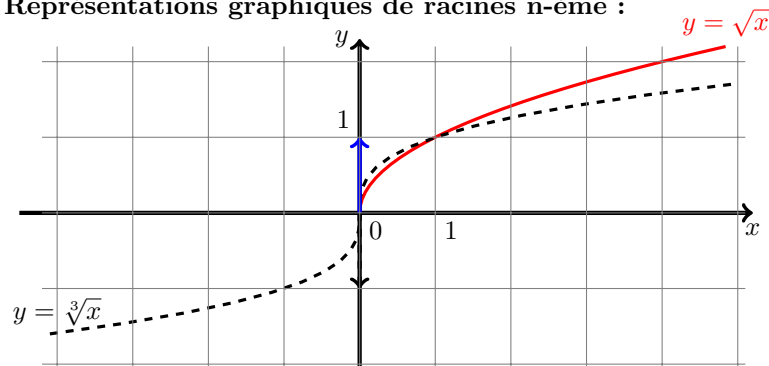
* Si $\alpha = \frac{1}{n}$ avec n entier positif **pair**, alors p_α est une **racine** n -ème définie sur $\mathbf{R}_+ : \forall x \geq 0, x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

* Si $\alpha = \frac{1}{n}$ avec n entier positif **impair**, alors p_α est une **racine** n -ème définie sur $\mathbf{R} : \forall x \in \mathbf{R}, x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

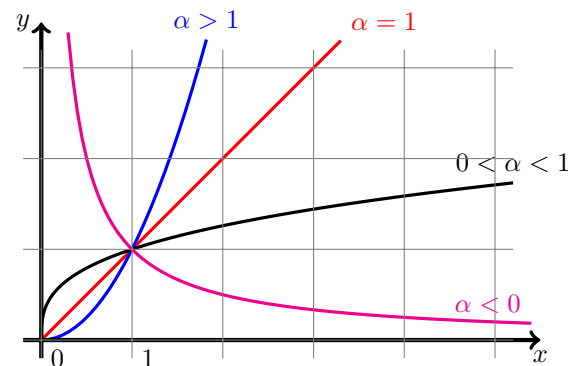
* Sinon, p_α est définie sur $\mathbf{R}_+^* : \forall x > 0, x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.

p_α est dérivable sur son ensemble de définition **sauf** en 0 pour les fonctions racines n -ème. On a alors : $p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Représentations graphiques de racines n -ème :



Représentations graphiques des puissances $\alpha \neq 0$ quelconques :



6 Fonctions polynomiales et fonctions rationnelles

* Une fonction **polynomiale** est d'expression : $\sum_{k=0}^n a_k x^k$, où $n \in \mathbf{N}$ et $a_k \in \mathbf{R}$.

* Une fonction **rationnelle** est le quotient de deux fonctions polynomiales. Les éventuelles racines du dénominateur sont appelés les **pôles** de la fonction rationnelle.

7 Plan d'étude d'une fonction

Si la consigne est : « Étudier la fonction f d'expression $f(x) = \dots$ », on doit :

1. Rechercher l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
2. Étudier les régularités de f : périodicité, parité/impairité, symétrie du graphe. Éventuellement, on peut alors réduire l'intervalle d'étude.
3. Étudier la monotonie de f . L'outil principal est le signe de sa dérivée :
 - * expliquer pourquoi f est dérivable,
 - * déterminer l'expression de $f'(x)$,
 - * étudier le signe de $f'(x)$ et conclure.
4. Repérer les valeurs particulières de f , comme ses éventuels extrema (maximum, minimum).
5. Étudier les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
6. Résumer tous les résultats dans un tableau de variations complet.
7. Tracer l'allure de la courbe représentative de f , en indiquant les éventuelles asymptotes et tangentes connues.

VIII Analyse asymptotique

1 Développements limités (DL)

Soit $n \in \mathbf{N}$. Une fonction f admet un développement limité d'ordre n (DL_n) en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ si et seulement si il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

- f admet un DL_0 en x_0 si et seulement si f est continue en x_0 .

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + o(1)$$

- f admet un DL_1 en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0 .

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

- Si f est n fois dérivable en x_0 ($n \geq 2$), alors f admet un DL_n en x_0 , mais la réciproque est fausse.

2 Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction n fois dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$.

Alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 , donné par :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

3 Formulaire des DL usuels en 0

Les formules suivantes sont données à de petits ordres. On peut bien sûr les prolonger aux ordres plus élevés (rarement utile).

$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$	pour $\alpha = \frac{1}{2}$:	$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$
$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$		$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)$
$\exp(x) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$		$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$
$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$		$\text{Arctan}(x) \underset{0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)$

IX Intégration sur un segment

1 Définition

Soit $I = [a, b]$ un **segment**, et soit f une fonction **continue** sur I .

Alors f admet une primitive F sur $[a, b]$ et on pose :

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

2 Interprétation géométrique

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$.

- Si f est positive sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt$ représente l'aire délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}_f$ entre les abscisses a et b ,
- si f est de signe quelconque sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt$ représente la différence entre l'aire des régions délimitées par la courbe $\mathcal{C}_f$ et situées au dessus ou en-dessous de l'axe des abscisses.

3 Propriétés de l'intégrale

Linéarité : $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$.

Relation de Chasles : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.

Positivité : Si f est positive sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Croissance : Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors : $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Inégalité de la moyenne : Soient $m = \min_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$ et $M = \max_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$.

Alors : $m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$.

Inégalité triangulaire : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$.

4 Théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I , soit $a \in I$. Alors, la fonction F définie sur I par : $\forall x \in I, \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

5 Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction, et soient u et v deux fonctions.

On pose : $G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$. Alors :

1. La fonction G est définie en x si u et v sont définies en x et si f est continue entre $u(x)$ et $v(x)$.
2. Si de plus u et v sont dérivables en x , alors G est dérivable en x et on a :

$$G'(x) = v'(x) \times f \circ v(x) - u'(x) \times f \circ u(x).$$

6 Procédés d'intégration

Intégration « à vue » : Tableau des primitives usuelles

$f(x)$	$F(x)$	I
$x^n, n \in \mathbf{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	$\mathbf{R}_+^*$ ou $\mathbf{R}_-^*$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\mathbf{R}_+^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$\mathbf{R}_+^*$ ou $\mathbf{R}_-^*$
e^x	$e^x + C$	$\mathbf{R}$
$\ln x$	$x \ln x - x + C$	$\mathbf{R}_+^*$
$\tan x$	$-\ln \cos x + C$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbf{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbf{R}$

$f(x)$	$F(x)$	I
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x + C$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan } x + C$	$\mathbf{R}$

Soit u une fonction dérivable.

fonction	primitives
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + C$
$u'e^u$	$e^u + C$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$

fonction	primitives
$u'u^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$u' \cos u$	$\sin u + C$
$u' \sin u$	$-\cos u + C$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\text{Arctan } u + C$

7 Intégration par partie

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , soient $a, b \in I$. Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

8 Changement de variables

Soient $a, b \in \mathbf{R}$, I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$, $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et $\varphi : J \rightarrow I$ une fonction strictement monotone de classe $\mathcal{C}^1$ sur J . Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

9 Sommes de Riemann

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

x Équations différentielles

1 Définitions

Une **équation différentielle linéaire** est une équation de la forme :

$$(E) \quad \sum_{k=0}^n a_k(t)y^{(k)}(t) = b(t)$$

où y est une fonction inconnue n fois dérivable, $a_0, \dots, a_n$ et b sont des fonctions continues. Les fonctions $a_k (k \in \llbracket 0, n \rrbracket)$ sont les **coefficients** de (E) , b est le **second membre** de (E) .

(E) est définie pour une variable $t \in I$ où I est un intervalle réel.

Si a_n n'est pas la fonction nulle, n est l'**ordre** de l'équation différentielle (E) .

On notera **EDL_n** une équation différentielle linéaire d'ordre n .

Soit $(E) : \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = b$ une **EDL_n**. Soit $(H) : \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = 0$.

Alors (H) est l'équation différentielle linéaire **homogène** associée à (E) . On la note : **EDLH**. La fonction nulle est toujours solution d'une **EDLH**.

2 Théorème de structure

Soit (E) une **EDL**, soit (H) son **EDLH** associée, d'ensemble-solution $\mathcal{S}_{(H)}$.

Alors l'ensemble-solution de (E) est de la forme : $\mathcal{S}_{(E)} = \{y_H + y_p, y_H \in \mathcal{S}_{(H)}\}$ où y_p est **n'importe quelle** solution de (E) .

3 Principe de superposition

Si (E_1) et (E_2) sont deux **EDL** de même **EDLH** et de seconds membres respectifs b_1 et b_2 , si y_1 et y_2 sont des solutions particulières respectivement de (E_1) et (E_2) , alors $y_3 = y_1 + y_2$ est solution de (E_3) , **EDL** de même **EDLH** et de second membre $b_1 + b_2$.

4 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Soit a une fonction continue sur un intervalle I , soit $(H) : y' + a(t)y = 0$. Alors : $\mathcal{S}_{(H)} = \left\{ t \mapsto K e^{-A(t)}, K \in \mathbf{R} \right\}$, où A est une primitive quelconque de a sur I .

Méthode de variation de la constante (MVC)

Pour résoudre l'**EDL₁** $(E) : y' + a(t)y = b(t) :$

- * on résout $(H) : y' + a(t)y = 0$. On trouve $y = K e^{-A(t)}$,
- * on remplace la constante K par une fonction dérivable $K(t)$,
- * on dérive $y = K(t)e^{-A(t)}$ et on réinjecte dans (E) , puis **on simplifie**,
- * on trouve $K'(t) = b(t)e^{A(t)}$, qu'on cherche à intégrer pour trouver $K(t)$,
- * on applique le théorème de structure avec :
 $y_H = K e^{-A(t)}$ et $y_p = K(t)e^{-A(t)}$.

Théorème de Cauchy "linéaire"

Soit I un intervalle sur lequel on définit (E) une **EDL₁**.

Soient $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbf{R}$. Alors il existe une unique solution y de (E) vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

5 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Soit à résoudre l'**EDLH₂** : $ay'' + by' + cy = 0$, a, b, c réels, $a \neq 0$

$ar^2 + br + c = 0$ est l'**équation caractéristique** de (H) , de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, cette équation possède deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 et $\mathcal{S}_{(H)} = \{t \mapsto A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}, (A, B) \in \mathbf{R}^2\}$.
- Si $\Delta = 0$, elle possède une solution-double réelle r_0 et $\mathcal{S}_{(H)} = \{t \mapsto (At + B) e^{r_0 t}, (A, B) \in \mathbf{R}^2\}$.
- Si $\Delta < 0$, elle possède deux solutions complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ et $\mathcal{S}_{(H)} = \{t \mapsto e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)), (A, B) \in \mathbf{R}^2\}$.

Soit à résoudre l'**EDL₂** : $ay'' + by' + cy = d(t)$, a, b, c réels, $a \neq 0$, et d continue

- * Le théorème de structure s'applique.
- * Si d est constante, on cherche y_p sous forme d'une constante.
- * Sinon, **on suit les indications de l'énoncé** pour trouver y_p .
- * On doit penser au principe de superposition lorsque $d(t) = d_1(t) + d_2(t)$.

Théorème de Cauchy "linéaire"

Soit (E) une **EDL₂** définie sur un intervalle I . Soient $t_0 \in I$, $y_0, y'_0 \in \mathbf{R}$.

Alors il existe une unique solution y de (E) vérifiant les conditions initiales

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$