

I Définitions et notations

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ désigne un univers probabilisé.

1 Variable aléatoire réelle discrète

DÉFINITION

Une **variable aléatoire réelle discrète (VARD)** est une VAR $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ dont l'ensemble des valeurs $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ (univers-image, ou support) est :

- ou bien *fini* de cardinal $n \in \mathbf{N}^* : X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
- ou bien *infini dénombrable* : $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbf{N}\}$.

Exemple 1 : On pioche une carte dans un jeu de 32 cartes. On gagne 4 points si on pioche un As, 1 point si on pioche une figure, et aucun point sinon. Alors le gain G est une VARD, d'univers-image $G(\Omega) = \{0, 1, 4\}$. C'est un ensemble fini de cardinal 3.

Exemple 2 : On jette une pièce bien équilibrée jusqu'à obtenir 'Pile'. On note X le rang du lancer où on obtient 'Pile', et on pose $X = 0$ si on n'obtient jamais 'Pile'.

Alors X est une VARD d'univers-image $X(\Omega) = \mathbf{N}$ infini dénombrable. .

Exercice 1 : Décrire en français l'événement $[G > 0]$, puis les événements $[X = 3]$ et $[X \leq 5]$.

2 Système complet d'événements lié à une VARD

PROPOSITION

Soit X une VARD d'univers-image $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, avec $I \subset \mathbf{N}$ fini ou infini.
Alors $([X = x_i])_{i \in I}$ est un système complet d'événements.

Exercice 2 : X est la VARD de l'exemple 2. On jette X fois un dé bien équilibré et on considère l'événement A : "on obtient au moins une fois un As". Calculer la probabilité de A .

3 Fonction d'une VARD

PROPOSITION

- Soit X une VARD définie sur Ω , et soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.
Alors $f \circ X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ est encore une VARD, notée : $f(X)$.
- Soient $X_1, \dots, X_n$ des VARD définies sur Ω , soit $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$.
Alors $f \circ (X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ est encore une VARD.

Exemple : G est la VARD de l'exemple 1. Alors G^2 est une VARD d'univers-image $G^2(\Omega) = \{0, 1, 16\}$.

Au cours de la même expérience, si on définit la VARD Y par $Y = 2$ si on pioche un *trèfle*, $Y = 1$ si on pioche un *pique* et $Y = 0$ sinon, alors $Z = G^2 - 2GY + 3Y$ est encore une VARD.

On pourra vérifier que $Z(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 6, 11, 16\}$.

II Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

1 Définition

DÉFINITION

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ une VARD. La **loi de probabilité de X** est l'application :

$$\mathbf{P}_X : \begin{cases} X(\Omega) \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto \mathbf{P}(X = x) \end{cases}$$

Déterminer la loi de la VARD X consiste à :

1. Déterminer l'univers-image $X(\Omega)$ de X ;
2. Pour tout $x \in X(\Omega)$, déterminer la probabilité : $\mathbf{P}(X = x)$.

Exemples :

- Avec la VARD de l'exemple 1, on a vu que $G(\Omega) = \{0, 1, 4\}$.

$\mathbf{P}(G = 4) = \mathbf{P}(\text{"piocher un As"}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ par équiprobabilité des tirages, et de même :

$$\mathbf{P}(G = 1) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(G = 0) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}.$$

On peut ici donner la loi de G sous forme d'un tableau :

x_i	0	1	4
$\mathbf{P}(G = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- Avec la VARD de l'exemple 2, $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ l'événement $[X = k]$ est : "obtenir 'Face' aux $(k-1)$ premiers lancers puis 'Pile' au $k^{\text{ème}}$ lancer".

Avec la notation du chapitre précédent, on a : $[X = k] = \omega_{k-1}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note F_n l'événement "on obtient 'Face' au $n^{\text{ème}}$ lancer".

On a donc : $[X = k] = \left(\bigcap_{n=1}^{k-1} F_n \right) \cap \overline{F_k}$ ce qui donne avec la formule des probabilités composées :

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(F_1) \times \mathbf{P}_{F_1}(F_2) \times \dots \times \mathbf{P}_{F_1 \cap \dots \cap F_{k-1}}(\overline{F_k})$$

Par indépendance des lancers successifs, et puisque la pièce est bien équilibrée :

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \right) \quad \text{soit : } \boxed{\forall k \geq 1, \mathbf{P}(X = k) = \left(\frac{1}{2} \right)^k}.$$

Enfin, $[X = 0] = \omega_\infty$ et $\mathbf{P}(X = 0) = 0$.

2 Propriétés

PROPRIÉTÉ

Soit X une VARD d'univers-image $X(\Omega)$.

* si $X(\Omega)$ est fini, $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X = x_k) = 1$.

* si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, alors $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbf{N}\}$.

Dans ce cas, la série $\sum \mathbf{P}(X = x_k)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_k) = 1$.

Exemples précédents :

$$1. \quad \mathbf{P}(G = 0) + \mathbf{P}(G = 1) + \mathbf{P}(G = 4) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1.$$

$$2. \quad \text{La série de terme général } \left(\frac{1}{2} \right)^k \text{ pour } k \geq 1 \text{ converge et : } \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = 1$$

en reconnaissant une série géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ ($|q| < 1$)

Remarque : l'événement "on n'obtient jamais 'Pile'" est quasi-impossible.

PROPRIÉTÉ

Soit X une VARD, et soit A une partie de $\mathbf{R}$. Alors : $\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{x \in A \cap X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x)$

Exemples : Avec la VARD de l'exemple 1 : $\mathbf{P}(G \in [-2, 2]) = \mathbf{P}(G = 0) + \mathbf{P}(G = 1) = \frac{7}{8}$.

Avec celle de l'exemple 2 :

$$\mathbf{P}(1 \leq X \leq n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \quad \text{(somme géométrique de raison } q \neq 1)$$

3 Existence d'une VARD

THÉORÈME ** Théorème d'existence d'une VARD **

• Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels distincts et $p_1, \dots, p_n$ des réels **positifs**.

Alors il existe une VARD X telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbf{P}(X = x_k) = p_k$

si, et seulement si, $\sum_{k=1}^n p_k = 1$.

• Soient $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ des réels distincts et $(p_k)_{k \in \mathbf{N}}$ des réels **positifs**.

Alors il existe une VARD X telle que $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbf{N}\}$ et $\forall k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(X = x_k) = p_k$

si, et seulement si, $\sum_{k \in \mathbf{N}} p_k$ est convergente, et $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.

Exemple : Soit $\lambda > 0$. On sait que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda$. On pose : $\forall k \in \mathbf{N}$, $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Alors $p_k \geq 0$, $\sum_{k \geq 0} p_k$

converge et a pour somme 1. Il existe donc une VARD X donc la loi est :

$$X(\Omega) = \mathbf{N} \text{ et } \forall k \in \mathbf{N}, \mathbf{P}(X = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

4 Fonction de répartition

DÉFINITION

Soit X une VAR définie sur un univers Ω .

On appelle **fonction de répartition** de X l'application $F_X : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$$

Exemple : pour la VARD de l'exemple 2 : $\forall n \in \mathbf{N}, \mathbf{P}(1 \leq X \leq n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$[X < 1]$ est quasi-impossible, donc : $\forall n \in \mathbf{N}, \mathbf{P}(X \leq n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Enfin, X ne prend que des valeurs entières, donc pour tout réel x , $\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(X \leq \lfloor x \rfloor)$

La fonction de répartition de X a donc pour expression :
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor x \rfloor} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

PROPRIÉTÉ

Soit F_X la fonction de répartition d'une VAR X . Alors :

- * $\forall x_0 \in \mathbf{R}, \mathbf{P}(X = x_0) = \mathbf{P}(X \leq x_0) - \mathbf{P}(X < x_0) = F_X(x_0) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} F_X(x)$
- * F_X est **discontinue** en un réel x_0 si et seulement si $\mathbf{P}(X = x_0) \neq 0$.

Remarques : • en particulier, F_X est continue en tout $x_0 \notin X(\Omega)$.

• la loi de probabilité de X est entièrement déterminée par sa fonction de répartition F_X .

Exercice 3 : Soit X une VARD dont la fonction de répartition F_X est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - e^{-n} & \text{si } n \leq x < n+1 \text{ pour un entier } n \geq 1 \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement F_X sur l'intervalle $[0, 4]$.
2. Déterminer la loi de X .

DÉFINITION

Deux VARD X, Y définies sur le même univers Ω ont **la même loi** lorsque :

- * $X(\Omega) = Y(\Omega)$;
- * $\forall x \in X(\Omega), \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(Y = x)$.

Remarque : X et Y ne sont pas forcément égales. Par exemple, on jette une pièce bien équilibrée, et on définit $X = 1$ si on obtient 'Pile' et 0 sinon, et $Y = 1 - X$. Alors X et Y ont même loi, mais $X \neq Y$.

THÉORÈME ** Loi d'une VARD entière **

Soit X une VARD ne prenant que des valeurs entières : $X(\Omega) \subset \mathbf{Z}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbf{Z}, \mathbf{P}(X = k) &= F_X(k) - F_X(k-1) \\ &= \mathbf{P}(X \geq k) - \mathbf{P}(X \geq k+1). \end{aligned}$$

Exercice 4 : On lance n fois un dé bien équilibré ($n \in \mathbf{N}^*$), et on note M_n et m_n respectivement le maximum et le minimum obtenu.

1. Déterminer les univers-image de M_n et m_n .
2. Pour tout $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, montrer que : $\mathbf{P}(M_n \leq k) = \left(\frac{k}{6}\right)^n$.
3. En déduire la loi de M_n .
4. Déterminer la loi de m_n .

III Variables aléatoires discrètes usuelles

1 Loi certaine : lorsqu'il n'y a aucun hasard

DÉFINITION

On dit qu'une variable aléatoire X définie sur un univers Ω suit la **loi certaine de valeur a** lorsque $X(\Omega)$ est un singleton : $\exists a \in \mathbf{R}, X(\Omega) = \{a\}$

En conséquence, $\mathbf{P}(X = a) = 1$ et pour tout $b \neq a$, $\mathbf{P}(X = b) = 0$.

2 Loi uniforme : loi d'équiprobabilité

DÉFINITION

Soit $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un sous-ensemble fini de $\mathbf{R}$, de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$.

On dit qu'une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi uniforme sur A** lorsque :

- $X(\Omega) = A$
- $\forall x \in A, \mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{n}$.

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(A)$

Remarque : Il s'agit de la loi d'**équiprobabilité** sur A . Elle traduit l'expression "**au hasard**".

Si $A = \llbracket 1, n \rrbracket$, la loi de X est alors donnée par :

x_k	1	2	$\dots$	n
$\mathbf{P}(X = x_k)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	$\frac{1}{n}$

Exemple : le résultat d'un lancer de dé supposé équilibré suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$.

3 Loi de Bernoulli : expérience à deux issues

DÉFINITION

Soit $p \in]0, 1[$. Une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi de Bernoulli de paramètre p** lorsque :

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$
- $\begin{cases} \mathbf{P}(X = 1) = p \\ \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p \end{cases}$

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

Cette loi modélise le succès ($X = 1$) ou l'échec ($X = 0$) à une expérience aléatoire donnée.

p est la probabilité du succès. Exemple : $X = 1$ si on obtient 'Pile' en lançant une pièce, et $X = 0$ sinon. p sera ici la probabilité de faire 'Pile' ($p = 1/2$ si la pièce n'est pas truquée).

4 Loi binomiale : loi des tirages avec remise

DÉFINITION

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

Une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi binomiale de paramètres n et p** lorsque :

- $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

X compte le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli, indépendantes, et de même paramètre p : si $X_1, \dots, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors :

$$X = \sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$$

5 Loi géométrique : loi du premier succès

DÉFINITION

Soit $p \in]0, 1[$. Une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi géométrique de paramètre p** lorsque :

- $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$
- $\forall k \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}(X = k) = p \times (1 - p)^{k-1}$

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

X est le rang d'apparition du premier succès lors d'une succession infinie d'épreuves de Bernoulli, indépendantes, et de même paramètre p .

La VARD X de l'exemple 2 suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$: $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

L'événement $[X = 0]$ étant quasi-impossible, on considère que le support de X est $\mathbf{N}^*$ plutôt que $\mathbf{N}$.

PROPRIÉTÉ

- Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors la fonction de répartition de X vérifie : $\forall n \in \mathbf{N}, F_X(n) = 1 - (1 - p)^n$.
- On a donc aussi : $\mathbf{P}(X > n) = (1 - p)^n$.

PROPOSITION ** Propriété d'invariance temporelle **

- La loi géométrique est une loi "sans mémoire" :
- si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $\forall n, m \in \mathbf{N}, \mathbf{P}_{[X > m]}(X > m + n) = \mathbf{P}(X > n)$.

6 Loi de Poisson : loi des événements rares

DÉFINITION

Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$. Une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi de Poisson de paramètre λ** lorsque :

$$\bullet X(\Omega) = \mathbf{N} \quad \bullet \forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Les lois de Poisson sont utilisées pour modéliser le nombre d'occurrences par unité de temps d'un phénomène dont on connaît l'occurrence moyenne λ . Par exemple, si on sait qu'en moyenne il y a 8 accidents par an à un carrefour donné, alors la VAR comptant le nombre d'accidents pendant une année fixée sera modélisée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 8$.

IV Moments d'une variable aléatoire réelle discrète

1 Moments d'ordre r

DÉFINITION

Soit X une VARD, et soit $r \in \mathbf{N}$.

• Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ est fini, on appelle **moment d'ordre r** de X le réel :

$$m_r(X) = \sum_{k=1}^n (x_k)^r \mathbf{P}(X = x_k).$$

• Si $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbf{N}\}$ et si la série $\sum_{k \geq 0} (x_k)^r \mathbf{P}(X = x_k)$ est **absolument convergente**,

alors le moment d'ordre r de X est la somme de cette série : $m_r(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} (x_k)^r \mathbf{P}(X = x_k)$.

Exercice 5 : Soit X une VARD de loi : $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et $\forall k \geq 1, \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$.

1. Vérifier que cette formule définit bien la loi d'une VAR.
2. Montrer que X n'admet aucun moment d'ordre $r \geq 1$.

PROPOSITION

Soit X une VARD admettant un moment d'ordre $r \in \mathbf{N}$.

Soit $s \in \mathbf{N}$ tel que $s \leq r$. Alors X admet aussi un moment d'ordre s .

2 Espérance, ou moyenne

DÉFINITION

L'espérance d'une VARD X est, s'il existe, son moment d'ordre 1 :

• Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors $\mathbf{E}(X) = m_1(X) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{P}(X = x_k)$

• Si $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbf{N}\}$ et si $\sum_{k \geq 0} x_k \mathbf{P}(X = x_k)$ est absolument convergente, alors :

$$\mathbf{E}(X) = m_1(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbf{P}(X = x_k)$$

Remarque : L'espérance est la valeur de X qu'on peut *espérer* obtenir, qu'on obtient **en moyenne**.

Exercice 6 : Soit X une VARD de loi : $X(\Omega) = \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\forall k \geq 2, \mathbf{P}(X = k) = \frac{k-1}{k!}$.

1. Montrer que : $\forall k \geq 2, \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$.
2. En déduire que la formule proposée définit bien la loi d'une VAR X .
3. Montre que X possède une espérance, et calculer cette espérance.

DÉFINITION

Une VAR admettant une espérance nulle est dite **centrée**.

PROPRIÉTÉ ** Linéarité de l'espérance **

Soient X, Y deux VARD définies sur le même univers Ω , admettant une espérance.
Alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance, et :

$$\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mu \mathbf{E}(Y)$$

preuve : Résultat admis.

PROPRIÉTÉ ** Croissance de l'espérance **

Soient X, Y deux VARD définies sur le même univers Ω , admettant une espérance.
On suppose que : $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$. Alors : $\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y)$.
En particulier : si $X \geq 0$ (ie : $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0$), alors : $\mathbf{E}(X) \geq 0$.

THÉORÈME ** Théorème de transfert **

Soit X une VARD, et soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. On pose $Y = f(X)$.

- Si $X(\Omega)$ est fini, alors : $\mathbf{E}(Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbf{P}(X = x)$.
- Si $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbf{N}\}$, alors Y admet une espérance si et seulement si $\sum_{k \geq 0} f(x_k) \mathbf{P}(X = x_k)$ converge absolument. Dans ce cas, $\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(x_k) \mathbf{P}(X = x_k)$.

preuve : Résultat admis.

3 Variance, écart-type

DÉFINITION

Soit X une VAR telle que :
 • X admet une espérance $\mathbf{E}(X)$,
 • $X - \mathbf{E}(X)$ admet un moment d'ordre 2.
 Alors on appelle **variance** de X et on note $\mathbf{V}(X)$ le réel : $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = m_2(X - \mathbf{E}(X))$.

Remarque : La variance est un *indicateur de dispersion* de la variable aléatoire autour de son espérance.

PROPOSITION ** Formule de KÖNIG HUYGENS **

Soit X une VAR. Alors X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2. On a dans ce cas : $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$

PROPOSITION

Si X admet une variance, alors : $\forall a, b \in \mathbf{R}, \mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X)$

PROPOSITION

Soit X admettant une variance. Alors : $\mathbf{V}(X) \geq 0$, et $\mathbf{V}(X) = 0$ si et seulement si X est presque sûrement constante : $\exists a \in \mathbf{R} \mid \mathbf{P}(X = a) = 1$.

DÉFINITION

Soit X une VAR admettant une variance.
On appelle **écart-type** de X et on note $\sigma(X)$ le réel : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.
Si $\mathbf{E}(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$, alors on dit que X est **centrée réduite**.

PROPOSITION

Soit X une VAR admettant une variance non nulle. On pose $X^* = \frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$.
Alors X^* est centrée réduite. X^* est la VAR **centrée réduite associée** à X .

V Moments usuels à connaître

- 1 **Loi certaine** : Si X suit une loi certaine de valeur a , alors $\mathbf{E}(X) = a$ et $\mathbf{V}(X) = 0$.
- 2 **Loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$** : Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors $\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2}$.
- 3 **Loi de Bernoulli** : Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbf{E}(X) = p$ et $\mathbf{V}(X) = p(1-p)$.
- 4 **Loi binomiale** : Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbf{E}(X) = np$ et $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$.
- 5 **Loi géométrique** : Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbf{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
- 6 **Loi de Poisson** : Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbf{E}(X) = \lambda$ et $\mathbf{V}(X) = \lambda$.

VI Simulations informatiques

On utilise le module `random` pour simuler des VAR : `import random as rd`

1 Loi certaine de valeur a

```
def certaine(a) :  
    return a
```

2 Loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$

```
def uniforme(a,b) :  
    return rd.randint(a,b)
```

3 Loi uniforme sur $A = \{x_1, \dots, x_n\}$

A est modélisé par une liste.

```
def uniforme(A) :  
    return rd.choice(A)
```

4 Loi de Bernoulli

```
def Bernoulli(p) :  
    return int(rd.random() < p)
```

5 Loi binomiale

```
def binomiale(n,p) :  
    S = 0  
    for _ in range(n) :  
        S += rd.random() < p  
    return S
```

```
def binomiale(n,p) :  
    return sum( [ rd.random() < p for _ in range(n) ] )
```

6 Loi géométrique

```
def geometrique(p) :  
    rang = 1  
    while rd.random() > p :  
        rang += 1  
    return rang
```

7 Loi de Poisson

```
import numpy as np  
def poisson(mu) :  
    k, p = 0, np.exp(-mu)  
    F = p  
    r = rd.random()  
    while F < r :  
        k += 1  
        p *= mu / k  
        F += p  
    return k
```

8 Lois quelconques

Situation 1 : deux listes données représentent la loi de probabilité d'une VAR X :

$V = [x_1, \dots, x_n]$ est la liste des valeurs
 $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$

$P = [p_1, \dots, p_n]$ est la liste correspondante des probabilités : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbf{P}(X = x_k) = p_k$.

```
def simuleX(V,P) :  
    S, k, r = P[0], 0, rd.random()  
    while S < r :  
        k += 1  
        S += P[k]  
    return V[k]
```

Situation 2 : $X(\Omega) = \mathbf{N}$ ou $\mathbf{N}^*$, et $\mathbf{P}(X = k)$ est donnée par une formule : $\mathbf{P}(X = k) = f(k)$:

```
def simuleX(f) :  
    S, k, r = f(0), 0, rd.random()  
    while S < r :  
        k += 1  
        S += f(k)  
    return k
```