

Programme de colles
Semaine 2 du 21/09 au 25/09

Séries de réels

- Définition, notation $\sum_{n \geq n_0} u_n$ ou $\sum u_n$. Sommes partielles $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$.
- Convergence d'une série, somme d'une série convergente, notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.
- Combinaison linéaire de séries convergentes.
- Théorème de comparaison pour des séries à termes positifs.
- Théorème d'équivalence pour des séries à termes positifs.
- Convergence absolue : définition, elle entraîne la convergence.
- Convergence et somme des séries géométriques, et dérivées première et seconde :

$$\sum_{n \geq 0} q^n \quad \sum_{n \geq 1} nq^{n-1} \quad \sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$$
 où la raison q est telle que $|q| < 1$.
- Convergence et somme de la série exponentielle ($x \in \mathbf{R}$) : $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$
- Divergence de la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ et convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Probabilités

- Expérience aléatoire, univers Ω , événements, événement certain, événement impossible.
- Notion de tribu $\mathcal{T}$ sur Ω (aucune question sur les tribus ne doit être posée).
- Événements incompatibles, système complet d'événements.
- Définition d'une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
- Propriétés d'une probabilité :

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A), \mathbf{P}(\emptyset) = 0, \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B), A \subset B \implies \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$$
- Pour des événements $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ 2 à 2 incompatibles, $\sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(A_n)$ converge et $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$
- Probabilité conditionnelle sachant A , notation $\mathbf{P}_A(B)$ ou $\mathbf{P}(B|A)$. $\mathbf{P}_A$ est une probabilité.
- Formule des probabilités composées (conditionnements successifs).
- Système quasi-complet d'événements.
- Formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est un système quasi-complet d'événements, alors la série de terme général $\mathbf{P}(A_n \cap B)$ est convergente et $\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n \cap B)$.
 Si de plus pour tout n , $\mathbf{P}(A_n) \neq 0$, alors $\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n) \mathbf{P}_{A_n}(B)$.
- Formule de Bayes.
- Indépendance de 2 événements, indépendance mutuelle de n événements, d'une suite d'événements.

Questions de cours :

1. Définir : "la série de terme général u_n converge", et définir alors la somme de cette série.
2. Que dire du comportement asymptotique de (u_n) lorsque $\sum u_n$ converge ?
 Que dire de $\sum u_n$ lorsque (u_n) ne converge pas vers 0 ?
3. Théorème de comparaison pour des séries à termes positifs.
4. Théorème d'équivalence pour des séries à termes positifs.
5. Définition de la convergence absolue, critère de convergence et inégalité sur les sommes.

6. Définition et critère de convergence d'une série télescopique.
7. Définition et critère de convergence d'une série géométrique, et dérivées première et seconde.
8. Définition et critère de convergence d'une série exponentielle.
9. Nature des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.
10. Définition d'une probabilité sur un univers Ω .
11. Définition d'une probabilité conditionnelle.
12. Définition de l'indépendance mutuelle de n événements.
13. Formule des probabilités composées.
14. Formule des probabilités totales.
15. Formule de Bayes.