

Devoir Maison n°1

Le but de l'exercice est d'établir la divergence de la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$. On note (H_n) la suite de ses sommes partielles : $\forall n \geq 1, H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Divergence de la série harmonique

1. (a) Pour $n \geq 1$, on pose $\Delta_n = H_{2n} - H_n$. Donner une expression de Δ_n sous forme de somme et valable pour tout entier $n \geq 1$.
 (b) En déduire que : $\forall n \geq 1 \quad H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
2. Justifier que la suite (H_n) est croissante.
3. Supposons que la suite (H_n) soit convergente.
 - (a) Prouver que $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ est convergente et donner sa limite.
 - (b) Aboutir à une contradiction et conclure que la suite (H_n) tend vers $+\infty$.
 - (c) Conclure.

Équivalent des sommes partielles

4. (a) Montrer que pour tout entier naturel $k \geq 2$:

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}.$$

- (b) Interpréter géométriquement ce résultat.
5. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$: $1 + \int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leq H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t}$.
6. (a) Montrer que $\ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.
 (b) En déduire un équivalent de H_n .

Programmation

7. Soit $M > 0$. Estimer à l'aide de la question précédente la valeur du premier rang N_M pour lequel $H_{N_M} > M$.
8. Programmer une fonction python `premier_rg(M)` prenant en entrée un flottant M et renvoyant en sortie le plus petit entier n tel que $H_n > M$.
9. Calculer `premier_rg(10)` et comparer avec la valeur de N_{10} de la question 7. Commenter.

Pour aller plus loin

On pose $\forall n \geq 1, u_n = H_n - \ln(n)$, et $u_0 = 0$.

On définit : $\forall n \geq 1, d_n = u_n - u_{n-1}$ la suite "dérivée" de $(u_n)_n$.

10. Montrer que : $\forall n \geq 2, d_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et déterminer un équivalent de d_n .
11. En déduire que la série de terme général d_n converge. On note $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n$.
12. Montrer que : $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Remarque : γ est appelée la constante d'Euler. On a : $\gamma \approx 0,577$
 On ignore si γ est rationnelle ($\gamma \in \mathbf{Q}$) ou irrationnelle.