

Corrigé du DM n°1

Divergence de la série harmonique

1.a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Par définition des sommes partielles, $\Delta_n = H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Les n premiers termes se simplifient (télescopage). Ainsi : $\Delta_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

1.b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $\forall k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, $k \leq 2n$. Par décroissance de l'inverse sur $]0, +\infty[$, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$.

La somme obtenue à la question précédente comporte exactement n termes. En sommant ces inégalités, on obtient :

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n}.$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On calcule l'accroissement de la suite (H_n) : $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$.

Ainsi, la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante, donc en particulier croissante.

3.a) Supposons que la suite (H_n) converge vers un réel ℓ . La suite $(H_{2n})_{n \geq 1}$ est la suite extraite de rangs pairs de (H_n) ; elle converge donc elle aussi vers ℓ .

Par différence de deux suites convergentes, $\lim \Delta_n = \lim(H_{2n} - H_n) = \ell - \ell = 0$.

Ainsi :

$$\lim \Delta_n = 0$$

3.b) La conclusion précédente est incompatible avec le résultat de la question 1.b). En effet, pour tout $n \geq 1$, $\Delta_n \geq 1/2$, alors qu'une suite convergeant vers 0 doit vérifier $|\Delta_n| < 1/2$ à partir d'un certain rang. L'hypothèse de convergence de (H_n) est donc fautive. Comme la suite (H_n) est croissante, si elle était majorée, elle serait convergente. Elle n'est donc pas majorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle tend alors vers $+\infty$:

$$\lim H_n = +\infty$$

3.c) Une série converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles converge vers une limite finie. Ici, les sommes partielles H_n tendent vers $+\infty$. Par conséquent :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \text{ diverge, et ses sommes partielles tendent vers } +\infty.$$

Équivalent des sommes partielles

4.a) Soit $k \geq 2$. La fonction inverse est décroissante sur $[k-1, k+1]$ donc :

* Pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $t \geq k$, donc $1/t \leq 1/k$. En intégrant cette inégalité sur $[k, k+1]$, on obtient :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}.$$

* De même, pour tout $t \in [k-1, k]$, on a $t \leq k$, donc $1/t \geq 1/k$. En intégrant sur $[k-1, k]$, on obtient :

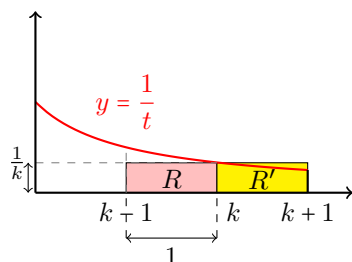
$$\frac{1}{k} = \int_{k-1}^k \frac{dt}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}.$$

Conclusion :

$$\forall k \geq 2, \quad \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$$

4.b)

Géométriquement, on considère la courbe d'équation $y = 1/t$ sur $[1, +\infty[$.



Sur l'intervalle $[k-1, k]$, la courbe est située au-dessus du rectangle R de largeur 1 et de hauteur $1/k$. L'aire de ce rectangle est donc inférieure à l'aire située sous la courbe.

Sur l'intervalle $[k, k+1]$, au contraire, la courbe est située sous le rectangle R' de largeur 1 et de hauteur $1/k$. L'aire située sous la courbe est donc inférieure à l'aire $1/k$ de ce rectangle. Les deux inégalités de la question 4.a) expriment exactement ces deux comparaisons d'aires.

5. Pour $n = 1$, les deux intégrales sont nulles et l'encadrement demandé est une égalité : $H_1 = 1$. Supposons désormais $n \geq 2$. En sommant, pour k allant de 2 à n , les encadrements de la question 4.a), on obtient :

$$\sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}.$$

Et d'après la relation de Chasles, on trouve :

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leq H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t}.$$

Par conséquent, $\forall n \geq 1, \quad 1 + \int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leq H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t}$

En calculant les intégrales, cet encadrement s'écrit : $1 + \ln(n+1) - \ln 2 \leq H_n \leq 1 + \ln n$.

6.a) Pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln n}$.

donc par opérations, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$. Ainsi : $\ln(n+1) \sim \ln n$

6.b) Pour $n \geq 2$, $\ln n > 0$. On peut donc diviser l'encadrement de la question 5 par $\ln n$:

$$\frac{1 + \ln(n+1) - \ln 2}{\ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

D'après la question 6.a), le membre de gauche tend vers 1. Le membre de droite tend également vers 1.

Le théorème d'encadrement donne alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$, c'est-à-dire : $H_n \sim \ln n$

Programmation

7. Pour $M > 0$, notons N_M le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $H_n > M$. La question précédente donne, pour les grandes valeurs de n , l'approximation $H_n \sim \ln n$.

Pour obtenir une estimation de N_M , on remplace donc H_n par $\ln n$. La condition $H_n > M$ devient approximativement $\ln n > M$, c'est-à-dire $n > e^M$. On obtient l'estimation : $N_M \approx e^M$.

8. Il suffit de calculer successivement les sommes partielles jusqu'à dépasser M .

```
def premier_rg(M):
    n = 0
    H = 0.0
    while H <= M:
        n += 1
        H += 1 / n
    return n
```

9. L'exécution de la fonction donne : `premier_rg(10)=12367`, soit $N_{10} = 12367$.

L'estimation de la question 7 donne, quant à elle, $e^{10} \approx 22026$.

L'erreur relative est ici de $r = \frac{e^{10} - 12367}{12367} \approx 78\%$

Le point essentiel est qu'on ne compose pas, en général, les équivalents. De l'équivalence $H_n \sim \ln n$, on ne peut donc pas déduire, en composant par la fonction exponentielle, une équivalence permettant d'obtenir N_M . L'approximation $N_M \approx e^M$ de la question 7 est seulement une estimation, qui se révèle ici assez grossière.

Pour aller plus loin

$$\begin{aligned}
 10. \quad \text{Soit } n \geq 2. \text{ On a : } d_n &= u_n - u_{n-1} \\
 &= (H_n - \ln n) - (H_{n-1} - \ln(n-1)) \\
 &= \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) \quad \text{par télescopage} \\
 &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)
 \end{aligned}$$

L'équivalent usuel du logarithme ne suffit pas à trouver un équivalent de d_n , car les termes prépondérants s'annulent. Il faut utiliser un développement limité à l'ordre 2 :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On obtient alors : $d_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, soit $\boxed{d_n \sim -\frac{1}{2n^2}}$.

11. D'après la question précédente, $|d_n| \sim \frac{1}{2n^2}$ et la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge d'après le cours, donc par théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série de terme général $|d_n|$ converge. Autrement dit, la série de terme général d_n est absolument convergente, ce qui implique qu'elle est convergente.

$$12. \quad \text{Soit } n \geq 1. \text{ On a : } \sum_{k=1}^n d_k = \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_0 = u_n \quad \text{par télescopage et puisque } u_0 = 0.$$

Ainsi, $H_n = \ln n + \sum_{k=1}^n d_k$ avec $\sum_{k=1}^n d_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \gamma + o(1)$ d'après la question précédente.

En conclusion, $\boxed{H_n = \ln n + \gamma + o(1)}$.

Remarque : on peut maintenant donner une approximation plus correcte de N_M :

$$\begin{aligned}
 H_n &\approx M \\
 \Leftrightarrow \ln n + \gamma + o(1) &\approx M \\
 \Leftrightarrow \ln n &\approx M - \gamma + o(1) \\
 \Leftrightarrow n &\approx e^M \times e^{-\gamma} \times e^{o(1)}
 \end{aligned}$$

et $e^{o(1)} \rightarrow 1$ donc on trouve : $\boxed{N_M \approx e^M \times e^{-\gamma}}$.

Application numérique avec $M = 10$: $e^{10} \times e^{-\gamma} \approx 12\,366,968$

On a ici une excellente approximation !