

Exercice 1

- On montre que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E_n . Faisons-le pour $\mathcal{S}_n$, c'est exactement la même chose pour $\mathcal{A}_n$. La matrice nulle est dans E_n car elle est égale à sa transposée. Si maintenant λ est un réel, et A et B deux éléments de E_n , par propriétés de la transposition : $(A + \lambda B)^T = A^T + \lambda B^T = A + \lambda B$, car A et B sont dans $\mathcal{S}_n$. Ainsi, $\mathcal{S}_n$ est un espace vectoriel, tout comme $\mathcal{A}_n$.
- Posons, pour toute matrice M de E_2 , $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, a, b, c, d étant quatre réels. On constate, par unicité des coefficients d'une matrice, que l'égalité $M = M^T$ donne :

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid (a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

c'est-à-dire, en posant $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que $\mathcal{S}_2 = \text{Vect}(J, K, L)$. Ceci montre que $\mathcal{B}_S = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}_2$. Montrons qu'elle est libre. Si a, b, d sont trois scalaires tels que $aJ + bK + dL = 0$, cela donne $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = 0$, et par unicité des coefficients : $a = b = d = 0$. Ainsi, $\mathcal{B}_S$ est une base de $\mathcal{S}_2$ et $\dim \mathcal{S}_2 = 3$.

- De la même manière que précédemment, on trouve que $\mathcal{A}_2 = \text{Vect}(Z)$ où $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $Z \neq 0$, il constitue une famille libre, mais aussi génératrice de $\mathcal{A}_2$, donc $\mathcal{B}_A = (Z)$ est une base de $\mathcal{A}_2$ et $\dim \mathcal{A}_2 = 1$.
- La juxtaposition de ces bases donne une famille de 4 vecteurs de E_2 . Comme $\dim E_2 = 4$, il suffit de prouver que cette famille est libre pour prouver que c'est une base de E_2 . Si une combinaison linéaire de J, K, L, Z est nulle pour quatre scalaires a, b, c, d , mettons :

$$aZ = bJ + cK + dL,$$

alors la matrice aZ est dans $\mathcal{S}_2$. Comme $aZ = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, elle ne peut être égale à sa transposée que si $a = 0$. Ce qui donne ensuite que $bJ + cK + dL = 0$, d'où $b = c = d = 0$ puisque $\mathcal{B}_S$ est une famille libre.

- L'existence a été prouvée précédemment. Si, avec des notations évidentes, on a deux décompositions d'une même matrice en $A + S = A' + S'$, cela donne alors $A - A' = S - S'$. Avec le même argument qu'à la question précédente, $A - A' = 0$ puisque $A - A'$ est dans $\mathcal{A}_2$, mais aussi dans $\mathcal{S}_2$ (car égale à $S - S'$.) D'où $S = S'$.

Exercice 2

1. Pour vérifier qu'on a bien compris les objets définis dans l'énoncé :
 - $Z = \{P \in \mathbf{R}_d[X] \mid P(0) = 0\}$,
 - $P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X(X-1), P_3 = X(X-1)(X-2), P_4 = X(X-1)(X-2)(X-3)$,
 - $\mathcal{B}_4 = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)(X-3))$,
 - $\mathcal{F} = \text{Vect}(X, X(X-1), X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)(X-3))$.
2. P_0 est de degré 0, et de façon générale, il est visible que pour $k \geq 1$, P_k est de degré k comme produit de k facteurs de degré 1. La famille $\mathcal{B}_d$ est donc libre en tant que famille de $d+1$ polynômes non nuls à degrés deux à deux distincts. Comme $\mathbf{R}_d[X]$ est de dimension $d+1$, $\mathcal{B}_d$ en est bien une base.
3. **a)** Le polynôme nul est bien dans Z car il s'annule en 0. Ensuite, si P et Q sont deux polynômes de Z , et λ un réel, comme P et Q s'annulent en 0, le polynôme $R = P + \lambda Q$ s'annule aussi en 0. En effet : $R(0) = P(0) + \lambda Q(0)$. Finalement $R \in Z$. Ainsi, Z est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_d[X]$.
 b) Comme $Z \subset \mathbf{R}_d[X]$, on a $\dim(Z) \leq d+1$. Comme la dimension est un entier, il suffit de prouver que $\dim(Z) \neq d+1$, c'est-à-dire, par propriétés de la dimension, que $Z \neq \mathbf{R}_d[X]$, ce qui est le cas puisque par exemple, le polynôme P_0 n'est pas dans Z .
 c) On commence par montrer que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont dans Z . Ceci est clair, car pour tout entier $k \geq 1$, P_k se factorise par X , donc admet 0 comme racine. Ensuite, Comme Z est un espace-vectoriel contenant les vecteurs de $\mathcal{F}$, il en contient aussi toutes leurs combinaisons linéaires : c'est la définition de $F \subset Z$.
 d) Comme toute sous-famille d'une famille libre est libre, et que $\mathcal{B}_d$ est libre d'après **2**, le rang de $\mathcal{F}$ est d , donc $\dim F = d$. Par inclusion **3.c**, en passant aux dimensions : $d \leq \dim Z$. Or par **3.b**, $d \geq \dim Z$. Donc $\dim Z = d$. Avec l'inclusion de **3.c** et l'égalité des dimensions, on a bien $F = Z$.
4. **a)** Les polynômes de la famille $\mathcal{C}_d$ se factorisent tous par X , ils admettent donc tous 0 pour racine. Ainsi $\mathcal{C}_d$ est une famille de vecteurs de Z . En tant que sous-famille de la base canonique de $\mathbf{R}_d[X]$, elle est libre. Finalement, en tant que famille libre de d vecteurs de Z qui est de dimension d , $\mathcal{C}_d$ est une base de Z .
 b) C'est la simple traduction dans le langage de l'algèbre linéaire que X^j est dans Z et que $\mathcal{F}$ en est une base.
5. Il suffit de remarquer que si $0 \leq k < d$, $(X-k)P_k = P_{k+1}$. Il ne reste plus qu'à développer pour conclure.
6. **a)** Par définition la matrice A s'obtient en rangeant en colonne j les coordonnées de P_k sur la base $\mathcal{C}_d$. On calcule avec le résultat de **5** :
 - $P_1 = X = 1 \cdot X$,
 - $P_2 = X^2 - X = -1 \cdot X + 1 \cdot X^2$,
 - $P_3 = X P_2 - 2 P_2 = X^3 - X^2 - 2X^2 + 2X = 2 \cdot X - 3 \cdot X^2 + 1 \cdot X^3$,
 - $P_4 = X P_3 - 3 P_3 = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 3X^3 + 9X^2 - 6X = -6 \cdot X + 11 \cdot X^2 - 6 \cdot X^3 + 1 \cdot X^4$

Finalement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b)** Pour calculer A^{-1} , on remonte le système d'inconnues x, y, z, t de forme réduite $(A|Y)$ qui est déjà échelonné, et où $Y^T = (a, b, c, d)$ est un second membre quelconque.

Les équations donnent par remontée dans l'ordre :

— $t = d$,

— puis $z = c + 6t = c + 6d$,

— ensuite, $y = b + 3z - 11t = b + 3c + 18d - 11d = b + 3c + 7d$,

— et enfin $x = a + y - 2z + 6t = a + b + 3c + 7d - 2c - 12d + 6d = a + b + c + d$.

Comme $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \iff A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, on obtient : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- c)** Par définition de la matrice de passage, les coordonnées de X^4 sur la base $\mathcal{B}_4$ sont don-

nées par la dernière colonne de A^{-1} : $\text{Mat}_{\mathcal{B}_d}(X^4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$

- 7. a)** Soit $d \geq 2$. D'après le résultat de **4.b)**, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ tels que :

$$X^d = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_d P_d.$$

Ces scalaires sont, bien entendu, les coordonnées de X^d sur la base $\mathcal{B}_d$. Cette égalité de fonctions donne en particulier que pour ces scalaires λ_i :

$$\forall n \geq 0 \quad n^d = \lambda_1 P_1(n) + \dots + \lambda_d P_d(n).$$

D'où par division par $n!$:

$$\forall n \geq 0 \quad \frac{n^d}{n!} = \lambda_1 \frac{P_1(n)}{n!} + \dots + \lambda_d \frac{P_d(n)}{n!}.$$

Or, pour $1 \leq k \leq d \leq n$, $\frac{P_k(n)}{n!} = \frac{(n-k+1)(n-k) \times \dots \times 2 \times 1}{n!} = \frac{1}{(n-k)!}$. En réinjectant cette égalité dans la relation précédente qui devient valable seulement à partir de $n = d$ pour pouvoir simplifier les quotients par des quantités non nulles, on a bien :

$$\forall n \geq d \quad \frac{n^d}{n!} = \lambda_1 \frac{1}{(n-1)!} + \dots + \lambda_d \frac{1}{(n-d)!}.$$

- b)** On conclut avec **6.c)** que :

$$\forall n \geq 4 \quad \frac{n^4}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + 7 \frac{1}{(n-2)!} + 6 \frac{1}{(n-3)!} + \frac{1}{(n-4)!}$$