

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On rappelle que si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A^T désigne la matrice transposée de A . Elle est de même format que A , et son coefficient général $a'_{i,j}$ est par définition $a'_{i,j} = a_{j,i}$.

Dans l'espace vectoriel $E_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère les ensembles :

$$\mathcal{S}_n = \{A \in E_n \mid A^T = A\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_n = \{A \in E_n \mid A^T = -A\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont des espaces vectoriels.

Désormais, on fixe $n = 2$.

2. Donner une base $\mathcal{B}_S$ de $\mathcal{S}_2$, et calculer la dimension de $\mathcal{S}_2$.
3. Donner une base $\mathcal{B}_A$ de $\mathcal{A}_2$, et calculer la dimension de $\mathcal{A}_2$.
4. Vérifier que la juxtaposition des bases $\mathcal{B}_S$ et $\mathcal{B}_A$ forme une base de E_2 .
5. En déduire que toute matrice M de E_2 s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice S de $\mathcal{S}_2$ et d'une matrice A de $\mathcal{A}_2$.

Exercice 2

Soit $d \geq 2$ un entier fixé. On considère $\mathbf{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus d . On notera $\mathcal{B}_C$ la base canonique de $\mathbf{R}_d[X]$.

- On définit le sous-ensemble Z de $\mathbf{R}_d[X]$ par : $Z = \{P \in \mathbf{R}_d[X] \mid P(0) = 0\}$.
- On introduit la famille de polynômes $\mathcal{B}_d = (P_0, P_1, \dots, P_d)$ définie par :

$$\forall i \in \{0, \dots, d\} \quad P_i = \prod_{j=0}^{i-1} (X - j) = X(X-1)\dots(X-i+1).$$

Ainsi : $P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X(X-1)$, etc.

- Enfin, on définit le sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}_d[X]$ par : $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est la famille de vecteurs donnée par $\mathcal{F} = (P_1, P_2, \dots, P_d)$.

1. Expliciter les objets ainsi définis dans le cas particulier $d = 4$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B}_d$ est une base de $\mathbf{R}_d[X]$.
3. **a)** Montrer que Z est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_d[X]$.
b) Montrer que Z est de dimension au plus d .
c) Montrer que $F \subset Z$.
d) En déduire que $F = Z$.
e) Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de Z et donner sa dimension.

4. **a)** Justifier que $\mathcal{C}_d = (X, X^2, \dots, X^d)$ est une base de Z .
b) Dédurre de **2.e)** que pour tout entier $j \in \{1 \dots d\}$, qu'il existe un unique d -uplet de scalaires $(\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{d,j}) \in \mathbb{R}^d$ tel que :

$$X^j = \alpha_{1,j}P_1 + \dots + \alpha_{d,j}P_d.$$

On ne demande pas de calculer ces scalaires.

5. Prouver que pour $0 \leq k < d$, $P_{k+1} = XP_k - kP_k$.
6. Dans cette question, *largement indépendante des précédentes*, on fixe $d = 4$.
a) Calculer la matrice de passage A de la base $\mathcal{C}_4$ à la base $\mathcal{F}$. On pourra utiliser le résultat de **5**.
b) Calculer la matrice A^{-1} . On fera apparaître les calculs sur la copie.
c) Donner les coordonnées du vecteur X^4 sur la base $\mathcal{F}$.
7. Application.
a) Justifier que pour tout entier $d \geq 2$, il existe d scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ tels que

$$\forall n \geq d \quad \frac{n^d}{n!} = \lambda_1 \frac{1}{(n-1)!} + \dots + \lambda_d \frac{1}{(n-d)!}.$$

- b)** Expliciter les réels λ_j dans le cas particulier $d = 4$.