

TD Proba

Ex 17 $\forall n \geq 3$:

$A_n =$ "au cours des n premiers lancers, on voit apparaître la séquence Pile-Pile-Face".

$B_n =$ "la séquence Pile-Pile-Face apparaît pour la première fois au n -ème lancer".

1) Relation de récurrence

$\forall n \geq 3$, $A_{n+1} = A_n \cup B_{n+1}$ et cette union est disjointe.

Par σ -additivité: $P(A_{n+1}) = P(A_n) + P(B_{n+1})$

$\forall k \geq 1$, on note P_k : "la pièce donne Pile au k -ème lancer".

Alors $B_{n+1} = \overline{A_{n-2}} \cap P_{n-1} \cap P_n \cap \overline{P_{n+1}}$

et d'après la formule des probabilités composées:

$$P(B_{n+1}) = P(\overline{A_{n-2}}) \times P_{\overline{A_{n-2}}}(P_{n-1}) \times P_{\overline{A_{n-2}} \cap P_{n-1}}(P_n) \times P_{\overline{A_{n-2}} \cap P_{n-1} \cap P_n}(\overline{P_{n+1}})$$

et par indépendance des lancers:

$$P(B_{n+1}) = P(\overline{A_{n-2}}) \times P(P_{n-1}) \times P(P_n) \times P(\overline{P_{n+1}})$$

La pièce étant équilibrée:

$$P(B_{n+1}) = P(\overline{A_{n-2}}) \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = (1 - P(A_{n-2})) \times \frac{1}{8}$$

et finalement: $\boxed{\forall n \geq 3, P(A_{n+1}) = P(A_n) + \frac{1}{8}(1 - P(A_{n-2}))}$

2. Convergence et limite de $(P(A_n))$

La suite $(A_n)_{n \geq 3}$ est croissante pour l'inclusion:

$$A_3 \subset A_4 \subset A_5 \subset \dots \subset A_{n-1} \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$$

donc par σ -additivité, $P(A_n)$ converge vers $P\left(\bigcup_{n=3}^{+\infty} A_n\right)$.

Notons l cette limite.

Par passage à la limite dans la relation de récurrence:

$$l = l + \frac{1}{8}(1 - l)$$

On résout: $l = 1$.

Cel $\boxed{(P(A_n))_n \text{ converge vers } 1.}$

Il est quasi-certain de finir par obtenir la séquence Pile-Pile-Face.